МГУ – ШКОЛЕ

Ю. А. Глазков И. И. Юдина
В. Ф. Бутузов

Геометрия

10

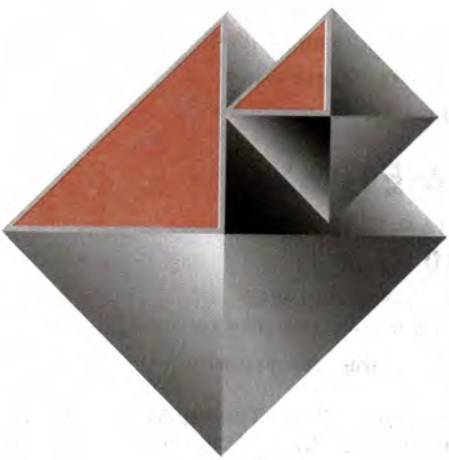
Рабочая тетрадь

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

Ю. А. Глазков И. И. Юдина
В. Ф. Бутузов

Геометрия



Рабочая тетрадь

10 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Базовый и профильный уровни

7-е издание

Москва «Просвещение» 2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г52

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 10—11» авторов Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом.

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна
Бутузов Валентин Федорович

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
10 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художники *Е. В. Соганова*, *О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *О. С. Ивановой*. Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*. Корректоры *О. Н. Леонова*, *А. В. Рудакова*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 16.04.13. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,67. Доп. тираж 16 000 экз. Заказ № 1486.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» Филиал «Чеховский Печатный Двор» 142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1 Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87

ISBN 978-5-09-029650-2

Аксиомы стереометрии

A_1. *Через любые три точки,* ______________________________ *, проходит плоскость, и притом* ______________________

A_2. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то* ______________________ *лежат в этой плоскости.*

A_3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют* ______________________ *, на которой лежат* ______________________ *этих плоскостей.*

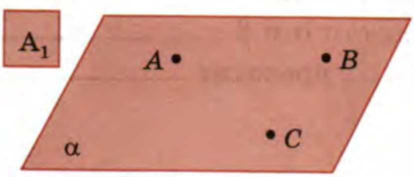


Рис. 1

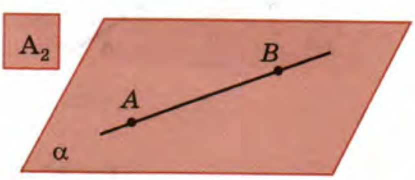


Рис. 2

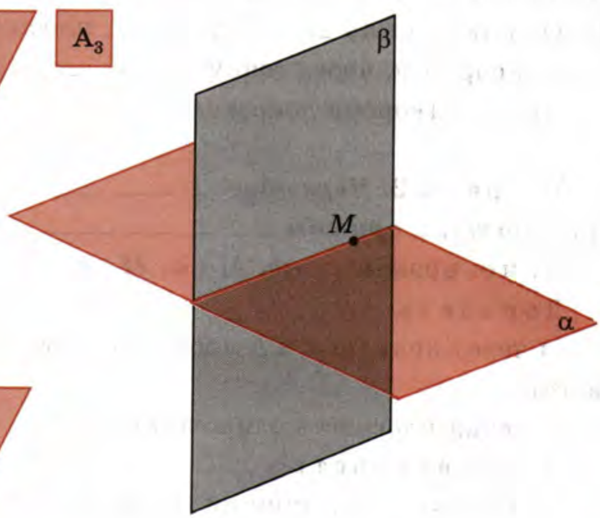


Рис. 3

Вопрос. Три точки лежат в каждой из двух различных плоскостей. Можно ли утверждать, что эти точки лежат на одной прямой?

Ответ. Да. Так как каждая точка принадлежит обеим плоскостям, то эти плоскости по аксиоме ______ имеют ______________________

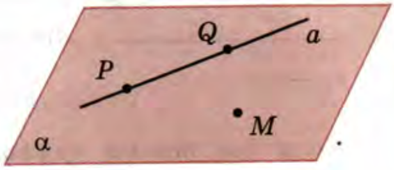
Теорема 1. ***Через прямую и ________________ точку проходит плоскость, и притом ________________***

Дано: прямая a, $M \notin a$.

Доказать:

а) через прямую a и точку M проходит плоскость;

б) такая плоскость единственная.



Доказательство.

а) Пусть $P \in a$, $Q \in a$. Точки ____________ не лежат на одной прямой, поэтому через эти точки по ________________ проходит некоторая плоскость α. Так как $P \in \alpha$ и $Q \in \alpha$, то прямая a лежит в плоскости α ________________ . Итак, плоскость α проходит через точку _____ и ________________

б) Допустим, что через прямую a и точку M проходит еще одна плоскость β. Тогда точки ____________ будут лежать и ________________ . Следовательно, по ________________ плоскости α и β ________________ . Таким образом, через точку _____ и __________ проходит ________________ плоскость. Теорема доказана.

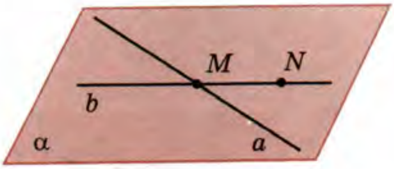
Теорема 2. ***Через две ________________ прямые проходит плоскость, и притом ________________***

Дано: прямые a и b, $M \in a$, $M \in b$.

Доказать:

а) через прямые a и b проходит плоскость;

б) такая плоскость единственная.



Доказательство.

а) Пусть $N \in b$, причем N и M — ________________ точки, тогда по ________________ через прямую a и точку N проходит плоскость α. Так как две точки ____ и ____ прямой b лежат в плоскости α, то по ________________ прямая b ________________ . Итак, через прямые a и b проходит ________________

б) Допустим, что через прямые a и b проходит еще одна ________________ β. Тогда точка ____ и ________________ лежат в этой плоскости, поэтому, согласно ________________ , плоскости α и β ________________ . Таким образом, через пересекающиеся прямые _____ и _____ проходит ________________ плоскость. Теорема доказана.

1

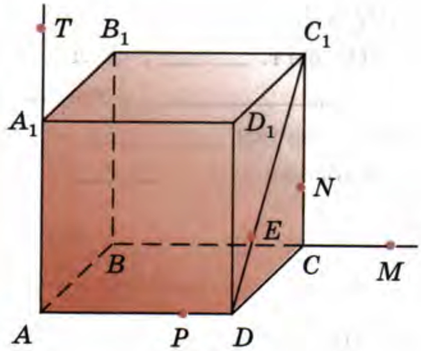
На рисунке изображен куб. Назовите:

а) плоскости, в которых лежат прямые NE, MN, TP, PM;

б) точки пересечения прямой MN с плоскостью DCC_1, прямой CE с плоскостью ABD, прямой PM с плоскостью BCC_1;

в) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и B_1C_1N, $A_1B_1C_1$ и CDE;

г) точки пересечения прямых AP и EC_1, DE и B_1C_1, AT и A_1D_1.



Ответ.

а) Прямая NE лежит в плоскости DCC_1, прямая MN лежит в плоскости ________ , прямая TP лежит в плоскости ________ , прямая PM лежит в плоскости ________

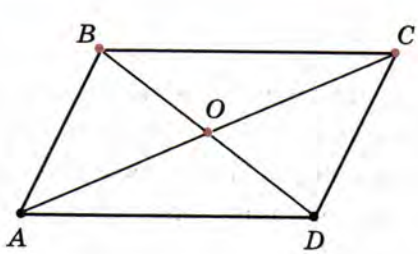
б) прямая MN пересекает плоскость DCC_1 в точке ___ , прямая CE пересекает плоскость ABD в точке ___ , прямая PM пересекает плоскость BCC_1 в точке ___

в) плоскости ABC и B_1C_1N пересекаются по прямой ____ , плоскости $A_1B_1C_1$ и CDE пересекаются по прямой ____

г) прямые AP и EC_1 пересекаются в точке ___ , прямые DE и B_1C_1 пересекаются в точке ___ , прямые AT и A_1D_1 пересекаются в точке ___

2

Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте (задача 9 учебника).



Решение. Пусть смежные вершины B и C и точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Тогда по аксиоме ____ прямые ____ и ___ лежат в плоскости α, и так как $A \in CO$, $D \in BO$, то точки ______________________________

____

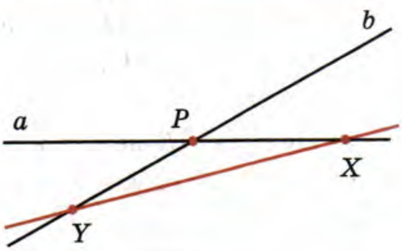
Ответ. ____

3

Точки M, N, P и Q не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые MQ и NP пересекаться?

Ответ. ______ . Если бы прямые MQ и NP пересекались, то, согласно ________________ , эти прямые лежали бы в ________ плоскости, а поэтому точки ______________ также лежали бы в этой плоскости, что противоречит ______________

4

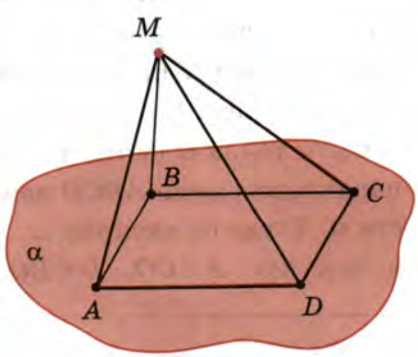


На рисунке прямые a и b пересекаются в точке P. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку P и пересекающие прямые a и b в каких-то точках X и Y, лежат в одной плоскости.

Доказательство. По ____________ через пересекающиеся прямые a и b проходит некоторая плоскость α, причем $X \in \alpha$ и $Y \in \alpha$, так как прямые a и b ____ .

Поэтому, согласно ____________________ , прямая XY лежит в плоскости α. Итак, все рассматриваемые прямые лежат в ____

5



На рисунке точки A, B, C и D лежат в плоскости α, а точка M не лежит в этой плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A, B, M и D, C, M?

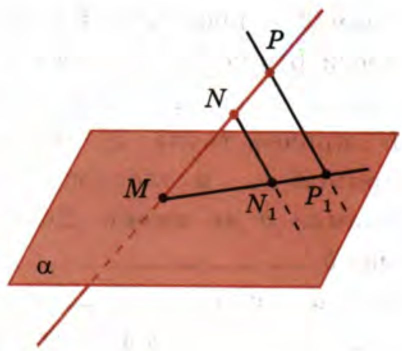
Ответ. ____ . Плоскости ABM и DCM имеют общую ____________________ , а потому, согласно ____________________ , они имеют ________________________ , т. е. ____________________

Глава I

Параллельность прямых и плоскостей

§ 1 Параллельность прямых, прямой и плоскости

6



На рисунке прямая PM пересекает плоскость α в точке M, $N \in PM$, причем $MN : NP = 2 : 1$, $PP_1 \parallel NN_1$, $NN_1 = 14$ см, P_1 и N_1 — точки пересечения параллельных прямых с плоскостью α.

а) Докажите, что точки M, N_1 и P_1 лежат на одной прямой.

б) Найдите длину отрезка PP_1.

Решение.

а) Прямые NN_1 и PP_1 задают некоторую плоскость, так как параллельные прямые ______________________________ ______________________________. Обозначим эту плоскость буквой β. Тогда по аксиоме ____ прямая NP лежит ____________________ и поэтому $M \in \beta$, так как __________. Плоскости α и β имеют общую точку M, а потому, согласно ________________, пересекаются по прямой, на которой лежат все общие точки ______________________. Точки M, N_1 и P_1 — общие точки ______________________, следовательно, они лежат на одной ______

б) $\triangle MNN_1 \sim \triangle MPP_1$, так как ______________, поэтому $\frac{MN}{MP} =$ ______,

т. е. $\frac{2}{\_\_} = \frac{\_\_}{PP_1}$, откуда $PP_1 =$ ____________

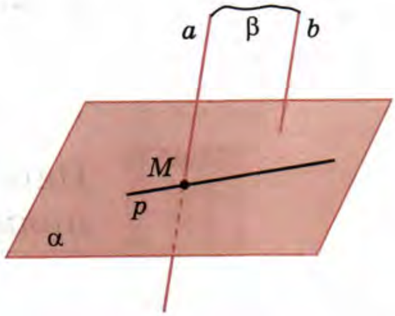
Ответ.

б) ____________

Лемма. ***Если одна из двух* ______________ *прямых пересекает данную плоскость, то и* ______________ ______________ *эту плоскость.***

Дано: $a \parallel b$, M — точка пересечения прямой a и плоскости α.

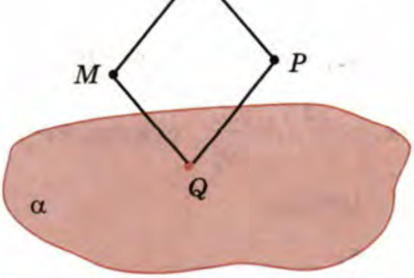
Доказать: прямая b ______________ ______________



Доказательство. Пусть β — плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как $M \in \alpha$, $M \in \beta$, то ______________ плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой p, проходящей через ______________. Таким образом, в плоскости β прямая p пересекает прямую a в точке ____, а потому она ______________ и параллельную ей ______________ в некоторой точке N, причем точка $N \in \alpha$, так как ________. Итак, N — общая точка прямой ____ и плоскости ____. Других общих точек с плоскостью α прямая b не имеет. Действительно, если предположить, что прямая b ______________ еще одну ______________, то, согласно ______________, прямая b будет целиком лежать в ______________, а значит, будет общей прямой ______________ и потому совпадет ______________. Но это невозможно, так как по условию $a \parallel b$, а прямые a и p ______________. Лемма доказана.

7

Вершина Q параллелограмма $MNPQ$ лежит в плоскости α, а точки M, N и P не лежат в этой плоскости. Докажите, что прямые NM и NP пересекают плоскость α.



Доказательство. Прямая PQ пересекает плоскость α в точке Q, так как $Q \in \alpha$, поэтому, согласно лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая NM, параллельная ____, также ______________.

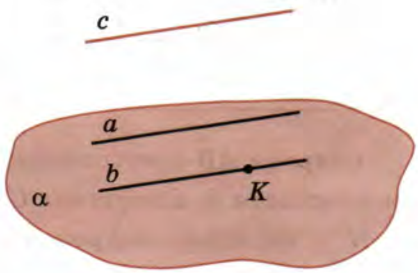
Прямая MQ пересекает ______________ ______________, поэтому ______________ прямая NP ______________ ________, что и требовалось доказать.

Теорема (о трех параллельных прямых). ***Если две прямые параллельны третьей, то они*** ________________

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$.

Доказать: ______

Доказательство. Нужно доказать, что прямые a и b:



1) лежат в одной ________________

2) не ________________

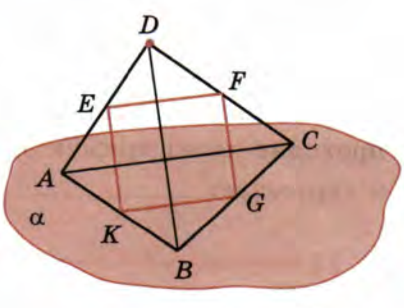
1) Пусть K — какая-нибудь точка на прямой b. Плоскость, проходящую через прямую a и точку K, обозначим буквой α. Прямая b лежит в плоскости α, так как если предположить, что она пересекает плоскость α, то, согласно лемме ________________________________, прямая c также будет пересекать плоскость α. Но $a \parallel c$, поэтому и прямая a будет ________________, что невозможно, так как прямая a лежит в ________________ . Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости.

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы ________________ ________________, параллельные ________________, что невозможно. Итак, $a \parallel b$.

Теорема доказана.

8

Точка D не лежит в плоскости ABC, точки E, F, G и K — середины отрезков AD, DC, BC и AB.



а) Докажите, что точки E, F, G и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите периметр четырехугольника $EFGK$, если $AC = 18$ см, $BD = 24$ см.

Решение. а) EF — средняя линия треугольника ____________, поэтому $EF \parallel$ _____ и $EF =$ ________; KG — средняя ________________ и потому ________________ .

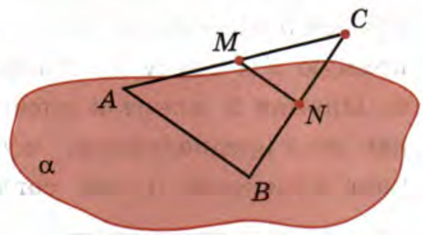
Следовательно, $EF \parallel$ ______ , т. е. точки E, F, G и K лежат на параллельных прямых, а значит, лежат в одной ______________

б) Четырехугольник $EFGK$ — параллелограмм, так как ______________ , причем $EF =$ ______________ , $EK =$ ______________ , а потому $P_{EFGK} =$ ______________

Ответ. б) ______

9

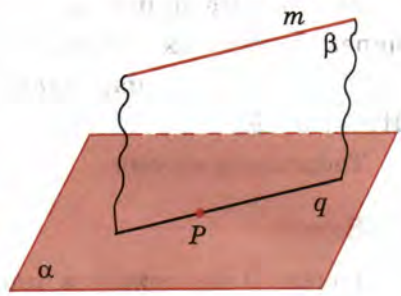
Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина $C \notin \alpha$, точки M и N — середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая $MN \parallel \alpha$.



Доказательство. Так как MN — средняя линия ______________ , то $MN \parallel AB$, а потому, согласно ______________ ______________ , $MN \parallel \alpha$.

10

На рисунке $m \parallel \alpha$, $P \in \alpha$. Докажите, что в плоскости α существует прямая, проходящая через точку P и параллельная прямой m.



Доказательство. Прямая m и не лежащая ______ точка P задают некоторую ______________ β. Так как $P \in \alpha$ и $P \in \beta$, то, согласно ______________ , плоскости α и β ______________ по некоторой прямой q, проходящей через ______________ . Докажем, что q — искомая прямая. Плоскость β проходит через прямую m, параллельную ______________ , и пересекает ______________ по прямой q, следовательно, ______

11

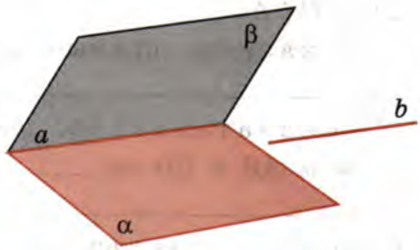
Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям (задача 25 учебника).

Доказательство. На рисунке плоскости α и β пересекаются по прямой a и $b \parallel a$. Докажем, что $b \parallel \alpha$ и $b \parallel \beta$. Прямая a лежит в плоскости α, а $b \parallel a$, следовательно, $b \parallel \alpha$ по ______________________________

____

________________. Аналогично, прямая a лежит ____________________ и ________, поэтому ______

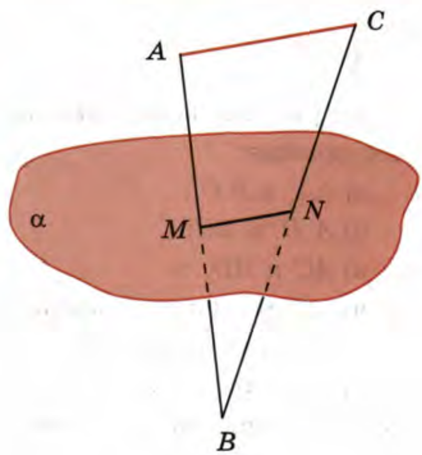
Итак, прямая b параллельна обеим пересекающимся плоскостям ___ и ___



12

Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны (задача 26 учебника).

Доказательство. На рисунке плоскость ABC проходит через прямую ___, параллельную плоскости α, и пересекает ее по ________________, следовательно, ________, а потому ______________________

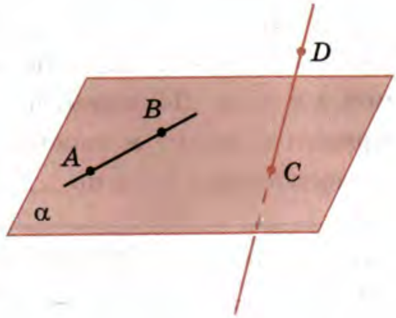


§ 2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Теорема (признак скрещивающихся прямых). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая ________________________________ в точке, ______________ ______________________________, то эти прямые скрещивающиеся.*

Дано: прямая AB лежит в плоскости α, прямая CD пересекает плоскость α, $C \in \alpha$, $C \notin AB$.

Доказать: прямые AB и CD — ______________________



Доказательство. Допустим, что прямые AB и CD не ______________________ . Тогда они будут лежать в некоторой ______________ β. Так как в этой плоскости будут лежать прямая AB и точка C, то плоскость β совпадает с ______________, а значит, прямая CD ______________________________, что противоречит ______________. Теорема доказана.

13

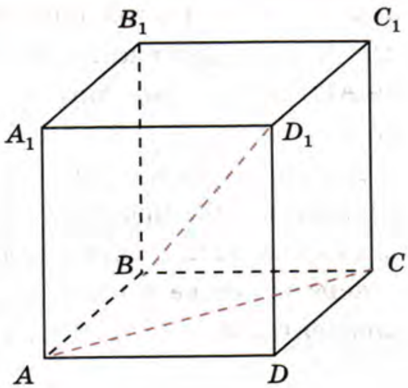
На рисунке изображен куб. Докажите, что прямые:

а) AA_1 и B_1C_1;

б) A_1D_1 и DC;

в) AC и BD_1 —

являются скрещивающимися.



Доказательство.

а) Прямая B_1C_1 лежит в плоскости $B_1C_1D_1$, а прямая AA_1 пересекает эту плоскость ______________, причем $A_1 \notin B_1C_1$, так как ______________________, поэтому, согласно ______________________________

______________, прямые AA_1 и B_1C_1 являются ______________________

б) ____

____

____

____

в) ____

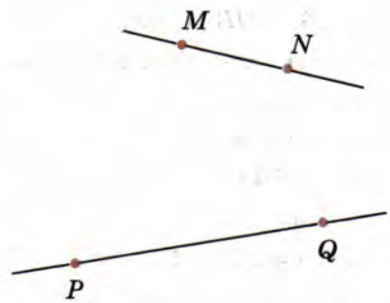
____

____

____

14

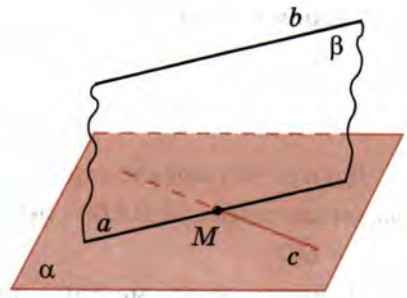
Прямые MN и PQ скрещивающиеся. Докажите, что прямые MQ и NP также скрещивающиеся.



Доказательство. Допустим, что прямые MQ и NP не ______________________________ . Тогда они лежат в некоторой плоскости β. Так как $M \in \beta$, $N \in \beta$ и $P \in \beta$, $Q \in \beta$, то, согласно ______________ , прямые ______________ также будут ______________________ . Но это противоречит условию. Значит, прямые MQ и NP ______________________

15

Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые (задача 36 учебника).



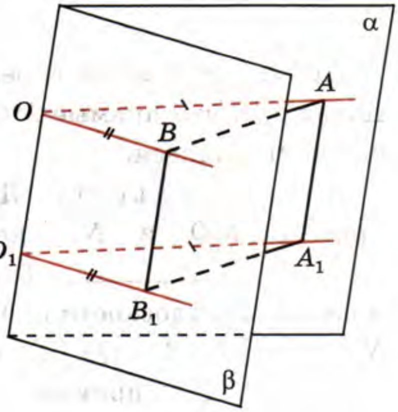
Доказательство. Пусть прямые a и c пересекаются в точке M. Прямые a и b лежат в некоторой ______________ β, так как ________________ . $M \in a$, поэтому $M \in \beta$, но $M \notin b$, так как ________ . Прямая c не лежит в плоскости β, так как в противном случае она пересекала бы ______________ , а по условию ______________________________

Итак, прямая b лежит в плоскости β, а прямая c пересекает ______________________ в точке $M \notin b$, поэтому, согласно ______________ ____ , прямые b и c — ______________________________

Теорема. ***Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы*** ____________

Дано: углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами.
Доказать: $\angle O = \angle O_1$.

Доказательство. На сторонах углов O и O_1 отложим равные отрезки OA и O_1A_1, OB и O_1B_1. Четырехугольник OO_1A_1A — параллелограмм, так как ________________________, поэтому $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 =$ ________. Четырехугольник OBB_1O_1 — ________________________, так как ________________________, поэтому $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 =$ ________



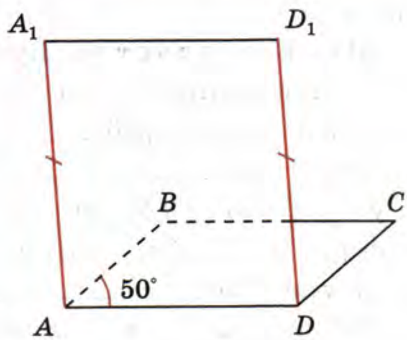
Итак, $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, следовательно, по теореме ________________________ $AA_1 \parallel$ ________. Кроме того, $AA_1 = BB_1$, так как ________________________, поэтому четырехугольник ABB_1A_1 — ________________________, и значит, $AB =$ ________. Таким образом, $\triangle AOB =$ ________ по ________________, поэтому $\angle O = \angle O_1$.

Теорема доказана.

16

Дано: четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD = 50°$, $AA_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = DD_1$.

Найдите угол между прямыми A_1D_1 и CD.



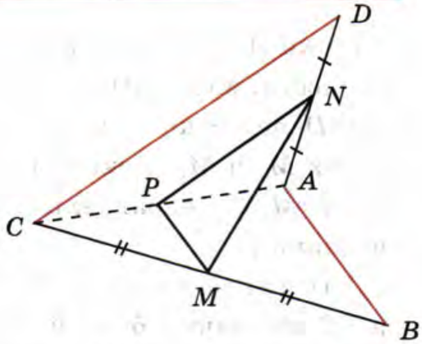
Решение. Прямые A_1D_1 и CD скрещивающиеся, так как прямая A_1D_1 лежит в плоскости ________, а прямая CD пересекает эту плоскость в ____________, не лежащей ________________________.

По условию $AA_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = DD_1$, поэтому четырехугольник ADD_1A_1 — ________________________ и, следовательно, $AD \parallel A_1D_1$. Кроме того, $AB \parallel CD$, так как ________________________. Таким образом, через точку A проходят прямые AD и AB, соответственно ________________________ скрещивающимся ________________________.

Так как $\angle BAD = 50°$, то, согласно определению, угол между скрещивающимися ________________________ равен ________

Ответ. ________

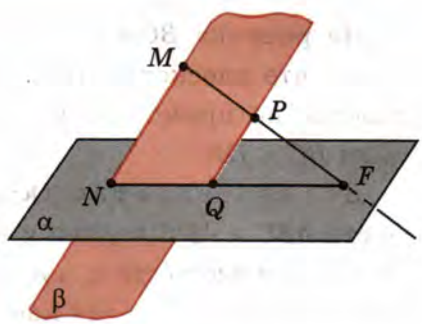
17



В пространственном четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD (задача 47 учебника).

Доказательство. Середины отрезков BC, AD и AC обозначим буквами M, N и P. Так как отрезок MP — средняя ______________________________, то $MP \parallel$ ______, и поэтому угол между прямыми AB и MN равен углу ______. Кроме того, $PM = \frac{1}{2}$ ______. Аналогично отрезок PN — ______________________________, и поэтому $PN \parallel$ ______ и $PN =$ ______, а угол между прямыми CD и MN равен __________. Так как $AB = CD$ ______________, то $PM =$ ______, т. е. треугольник PMN — ______________. Следовательно, $\angle$ ______ $=$ $= \angle$ ______, а это означает, что угол между прямыми AB и MN равен углу между прямыми __________, что и требовалось доказать.

18



Дано: $MN \parallel PQ$, $N \in \alpha$, $Q \in \alpha$, $MN =$ $= 10$ см, $PQ = 6$ см, $NQ = 4$ см.

а) Докажите, что прямая MP пересекает плоскость α в некоторой точке F.

б) Найдите отрезок QF.

Решение.

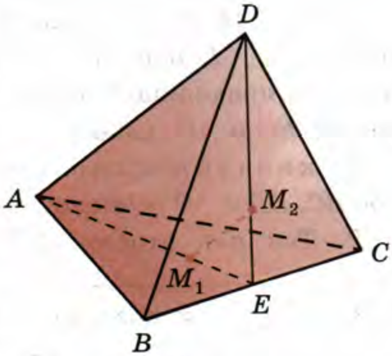
а) Прямые MN и PQ лежат в некоторой плоскости β, так как __________. Прямые MP и NQ не параллельны, так как в противном случае четырехугольник $MNQP$ был бы ______________ и поэтому выполнялось бы равенство $MN =$ ______, что противоречит __________, следовательно, прямая MP пересекает прямую NQ в некоторой точке F. Так как NQ — линия пересечения плоскостей __________, то $F \in \alpha$, и, значит, прямая MP ______________________________.

б) Так как $PQ \parallel MN$, то $\triangle PQF \sim$ __________. Следовательно, $\frac{QF}{NF} = \frac{PQ}{\_\_\_}$, т. е. $\frac{\_\_\_}{QF+4} = \frac{6}{10}$, откуда $QF =$ ____ см.

Ответ. б) $QF =$ ____ см.

19

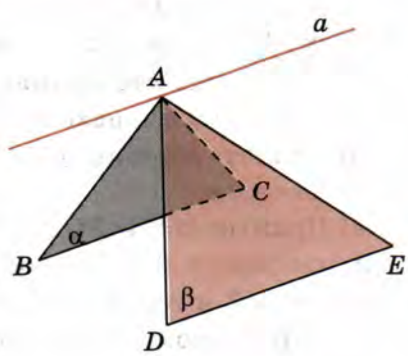
Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны (задача 89 учебника).



Доказательство. Середину отрезка BC обозначим буквой E. Отрезки AE и DE — ______________ треугольников ________ и ________, поэтому точки M_1 и M_2 лежат на ______________________ и делят их в отношении ______, считая от точки E. Отсюда следует, что $\frac{EM_1}{EA} = \frac{EM_2}{\_\_\_} = \_\_\_$. Таким образом, стороны EM_1 и EM_2 треугольника EM_1M_2 пропорциональны ______________________________________, а угол E у этих треугольников — ______________________. Поэтому __________________ и, следовательно, _________________

20

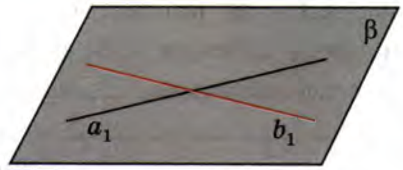
На рисунке $BC \parallel DE$, $A \notin BCD$. Докажите, что плоскости ABC и ADE пересекаются по прямой, параллельной прямым BC и DE.



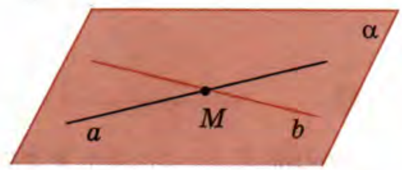
Доказательство. Обозначим плоскости ABC и ADE через α и β. Прямая DE не лежит в плоскости α, а прямая BC не лежит ______________, так как в противном случае эти плоскости совпали бы и тогда точка A лежала бы в плоскости BCD, что ____________________________________. Плоскости α и β имеют общую точку A и поэтому, согласно ______________, имеют ____________________, т. е. пересекаются по некоторой ___________ a. По условию $DE \parallel BC$ и так как DE не лежит в ____________________, то по признаку ____ $DE \parallel \alpha$.

Итак, плоскость β проходит через прямую DE, параллельную плоскости _____, и пересекает ее по _____________. Следовательно, ___________, а так как $DE \parallel BC$, то ________

§ 3 Параллельность плоскостей



Теорема (признак параллельности двух плоскостей). ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости*** ______________________________ ______________________________ ***двум прямым другой плоскости, то эти плоскости*** ______________________________



Дано: прямые a и b, пересекающиеся в точке M, лежат в плоскости α, прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство. Заметим, что $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ по признаку ______________________________ ______________________________. Теперь допустим, что плоскости α и β не ______________________________, а пересекаются по ______________________________ c. Тогда плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости ____, и пересекает плоскость β по прямой c. Следовательно, $a \parallel c$. Но плоскость α проходит и ______________________________ ______________________________, следовательно, $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые ________, параллельные прямой ____. Но это невозможно, так как по ______________________________ через точку M ______________________________.

Значит, наше допущение неверно и $\alpha \parallel \beta$.

Теорема доказана.

21

Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α (задача 52 учебника).

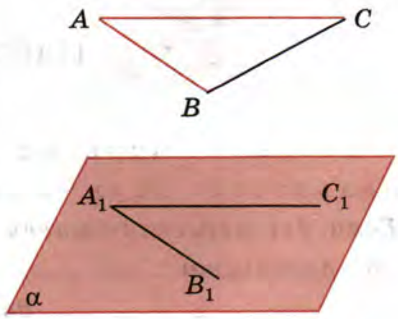
Доказательство. Пусть стороны AB и AC треугольника ABC параллельны плоскости α. Докажем, что и третья сторона BC параллельна плоскости α. Так как $AB \parallel \alpha$, то, согласно заданию 10, в плоскости α существует некоторая прямая $A_1B_1 \parallel AB$. Аналогично существует прямая A_1C_1 плоскости α, параллельная прямой AC. Итак, две пересекающиеся прямые AB и AC плоскости ABC параллельны двум прямым A_1B_1 и A_1C_1 плоскости α, следовательно, ______________________

____

______________________, эти плоскости

__________________, а потому прямая BC

____________________ плоскости α.

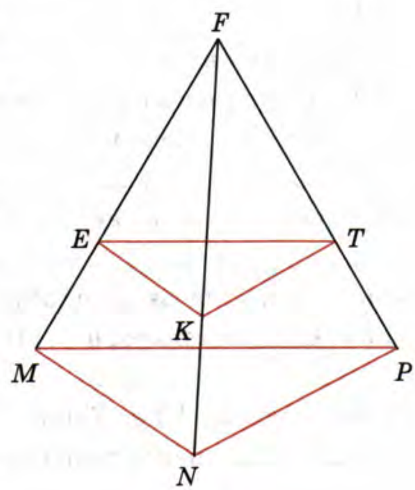


22

Точка F не лежит в плоскости треугольника MNP, точки E, K и T лежат на отрезках FM, FN и FP, причем $\frac{FE}{FM} = \frac{FK}{FN} = \frac{FT}{FP} = \frac{2}{3}$.

а) Докажите, что плоскости EKT и MNP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника EKT равна 36 см².



Решение.

а) $\triangle EFK \sim$ ______, так как ______

____________________________________,

поэтому $EK \parallel$ ____ и $EK =$ ________.

Аналогично $\triangle KFT \sim$ ________, так как ______________________

__________________, поэтому $KT \parallel$ _____ и $KT =$ __________

Итак, пересекающиеся прямые EK и KT плоскости EKT соответственно ______________________________________ плоскости MNP, следовательно, эти плоскости ______________________

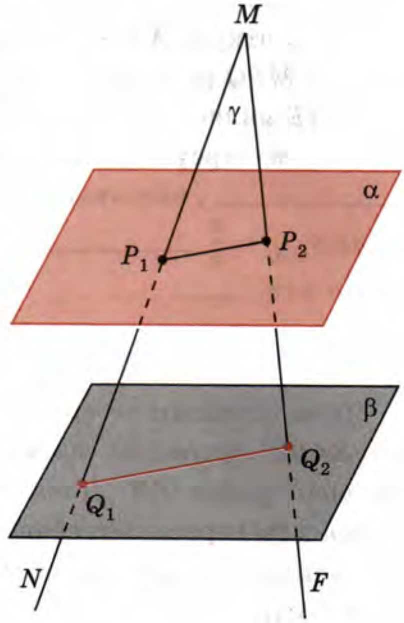
б) $\triangle EKT \sim$ ________, так как ______________________________

____, и коэффициент подобия k равен _____. Поэтому $S_{EKT} : S_{MNP} =$ ____ $=$ _____, откуда $S_{MNP} =$ ____________ $=$ ____________

Ответ. б) ____________

23

На рисунке параллельные плоскости α и β пересечены прямыми MN и MF, P_1, P_2 и Q_1, Q_2 — точки пересечения прямых с плоскостями α и β. Найдите P_1P_2, если $MP_1 : MQ_1 = 3 : 4$ и $Q_1Q_2 = 72$ см.



Решение.

1) Пересекающиеся прямые MN и MF задают некоторую ____________ γ. P_1 и P_2 — общие точки плоскостей α и γ, поэтому прямая P_1P_2 — ____________ ____________, аналогично Q_1 и Q_2 — ________________________, поэтому прямая Q_1Q_2 — ____________

Итак, параллельные плоскости α и β пересечены плоскостью γ, поэтому, согласно ________________________ ________________________, линии их пересечения ____________, т. е. $P_1P_2 \parallel$ ________

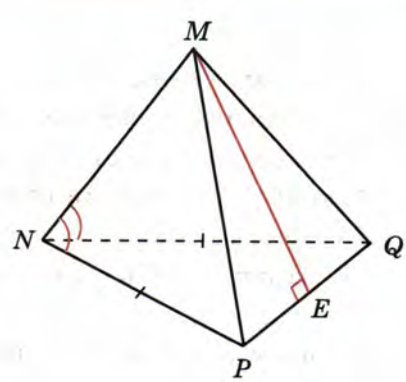
2) $\triangle P_1MP_2 \sim$ ________, так как ________, следовательно, $MP_1 : MQ_1 = P_1P_2 :$ ________, $P_1P_2 =$ ________ $=$ ________

Ответ. ________

§ 4 Тетраэдр и параллелепипед

24

В тетраэдре $MNPQ$ ребро $MN = 3\sqrt{2}$ см, $NP = NQ = 7$ см, $PQ = 8$ см, $\angle MNP = \angle MNQ = 45°$. Найдите площадь грани MPQ.



Решение.

1) $\triangle MNP = \triangle MNQ$, так как ________________________ ________________________, поэтому $MP =$ $=$ ________

2) По теореме косинусов для треугольника MNP имеем: $MP^2 =$ = ______________________________ = ______________________ = = ____ , откуда $MP =$ ___ см.

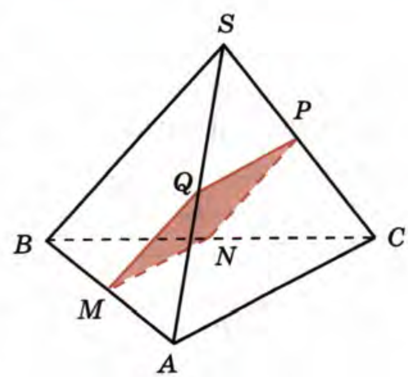
3) $\triangle MPQ$ равнобедренный, так как __________ , а потому его высота ME является ____________ , т. е. $PE =$ ____ см. Итак, в прямоугольном треугольнике MEP гипотенуза __________ , катет __________ , следовательно, $ME =$ ____ см.

4) $S_{MPQ} = \frac{1}{2}$ ____________ $= \frac{1}{2}$ _____ см^2 = ____ см^2.

Ответ. ____

25

Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость, параллельная ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым (задача 69 учебника).



Доказательство. Пусть MNQ — плоскость, проходящая через середины M и N ребер AB и BC и параллельная ребру SB. Плоскость SAB проходит через прямую SB, параллельную плоскости ______ , и пересекает ее по прямой MQ, поэтому MQ _____ . Аналогично плоскость SBC проходит ____

и пересекает ______________________ , поэтому ______ . Итак, $MQ \parallel SB$ и ______ , поэтому ______ , что и требовалось доказать.

26

В тетраэдре $SABC$ точки M и K лежат на ребрах SB и BC, а точка T — на продолжении ребра BC. Постройте:

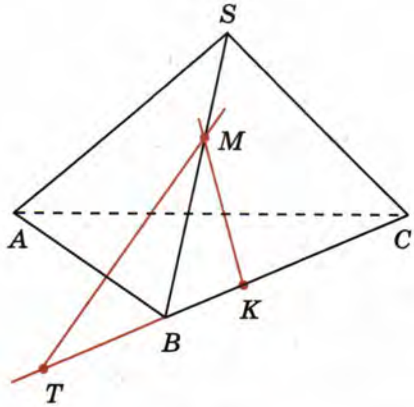
а) точку пересечения прямых MK и SC;

б) точку пересечения прямой TM и плоскости ASC.

Решение.

а) Прямая MK лежит в плоскости SBC, так как точки ________________________________ , причем на рисунке прямые MK и SC не параллельны, поэтому прямая MK пересекает прямую SC в некоторой точке ____ . Итак, ____ — точка пересечения прямых MK и SC.

б) Прямая TM лежит в плоскости BSC, так как точки ____________________ . На рисунке прямые TM и SC не параллельны, поэтому прямая TM пересекает прямую SC в некоторой точке ____ , а так как прямая SC лежит в плоскости ASC, то и точка ____ $\in ASC$. Следовательно, прямая TM пересекает плоскость ASC в точке ____

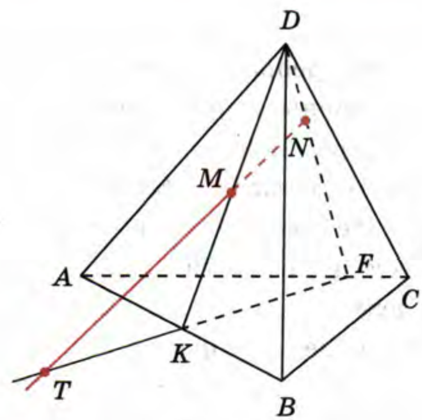


27

Точки M и N расположены на гранях ADB и ADC тетраэдра $DABC$. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

Решение. Поскольку точки D и M лежат в плоскости ADB, то прямая DM ____________________ и пересекает ребро ____________________

Аналогично прямая DN пересекает ____________________ . Точки F и K лежат в плоскости DMN, а потому и ____________________ лежит в ____________________ . Так как на рисунке прямая MN не параллельна прямой FK, то прямая MN пересекает прямую ____ в некоторой точке T. Прямая FK лежит в плоскости ABC, поэтому точка ____________ и, значит, прямая MN пересекает плоскость ____ в точке ____



28

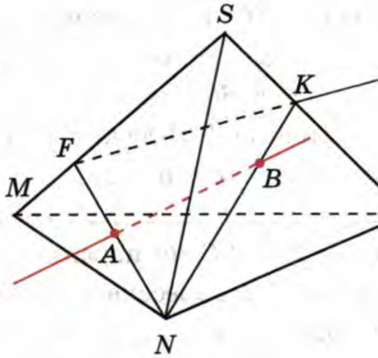
Точки A и B расположены на гранях SMN и SNP тетраэдра $SMNP$. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью SMP.

Р е ш е н и е. Поскольку точки N и A лежат в плоскости SMN, то прямая NA ________________________________

и пересекает ________________________

________________ . Аналогично прямая NB ________________________________

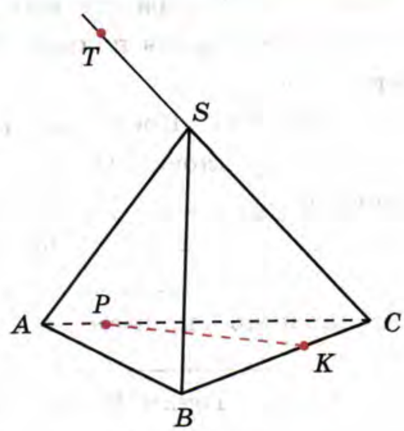
________________________________ .



Итак, точки ________ лежат в плоскости ANB, а потому и ____________ лежит в этой плоскости. На рисунке прямые AB и FK не параллельны, следовательно, прямая AB пересекает прямую ______ в некоторой точке _____ , и так как прямая FK лежит в плоскости SMP, то и точка __________ , а значит, прямая AB пересекает плоскость _________ в точке _____

29

На ребрах AC и BC тетраэдра $SABC$ отмечены точки P и K, а на продолжении ребра SC — точка T. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью PKT.



Р е ш е н и е. Поскольку точки T и P лежат в плоскости ________ , то прямая TP лежит ______________________ и пересекает ребро ______ в некоторой ____________ . Аналогично прямая TK лежит в плоскости _______ и пересекает ребро ______________________________ . Следовательно, сечением тетраэдра $SABC$ плоскостью PKT является ________________________________

Проведите указанные прямые и постройте искомое сечение.

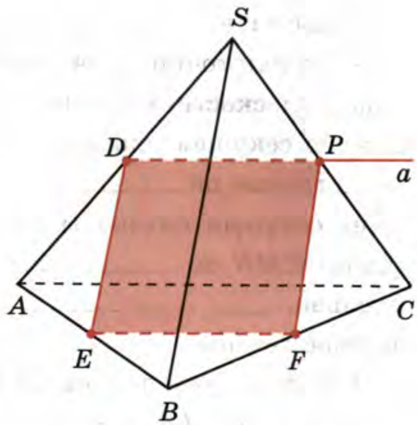
30

В тетраэдре $SABC$ точки D, E и F являются серединами ребер SA, AB и BC, $AC = 32$ см, $SB = 40$ см, угол между прямыми AC и SB равен $90°$.

а) Докажите, что плоскость DEF проходит через середину P ребра SC.

б) Найдите площадь четырехугольника $DEFP$.

Решение.



а) EF — средняя линия треугольника ________, поэтому $EF \parallel$ ______, и по признаку ____ $EF \parallel ASC$.

Плоскости ASC и DEF имеют общую точку D и потому, согласно ________________, имеют общую прямую, проходящую через точку ___. Обозначим эту прямую буквой a. Так как плоскость DEF проходит через прямую EF, параллельную плоскости _______, и пересекает эту плоскость по прямой ____, то $a \parallel$ ______. Мы получили, что $AC \parallel EF$ и $a \parallel EF$, откуда следует по ____, что $a \parallel AC$.

Рассмотрим $\triangle ASC$. Точка D — середина стороны ______, прямая a, проходящая через точку D, параллельна ______, следовательно, прямая a пересекает сторону SC в точке P — середине ______. Тем самым мы доказали, что плоскость DEF проходит через середину P ребра ______

б) Четырехугольник $DEFP$ — параллелограмм, так как _______________________________________, причем $EF =$ _______, а $DE =$ = __________________, так как DE — средняя ____

Рассмотрим угол DEF. Его стороны ED и EF соответственно параллельны прямым BS и AC, угол между которыми по условию равен 90°. Поэтому и $\angle DEF =$ ______, и, значит, параллелограмм $DEFP$ является __________________________

$S_{DEFP} = DE \cdot$ ______ = ____________ см² = ________ см².

Ответ. б) ____________

31

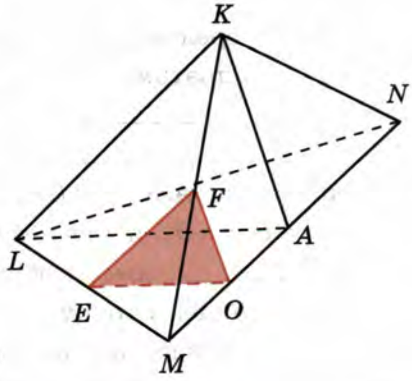
На рисунке изображен тетраэдр $KLMN$.

а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN.

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна 24 см² (задача 75 учебника).

Р е ш е н и е.

а) Так как точки L и A принадлежат секущей плоскости и грани ______ тетраэдра, то секущая плоскость пересекается с этой гранью по ____________ . Аналогично секущая плоскость пересекается с гранью KMN по ____________ . Следовательно, ______________________ — искомое сечение.



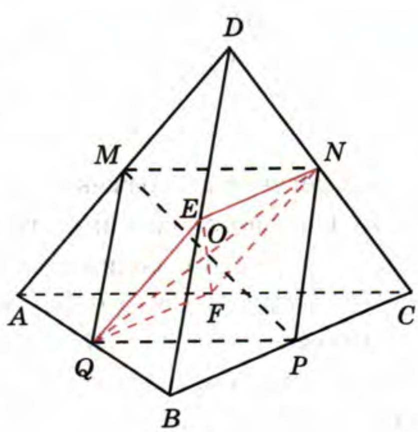
б) Рассмотрим плоскости EFO и LKA. $EF \parallel LK$ и $EO \parallel LA$, так как ____ .

Итак, две пересекающиеся прямые плоскости EFO соответственно параллельны двум прямым плоскости ______ , поэтому, согласно ____ , плоскости EFO и ______________________________ . Треугольники EOF и LAK подобны, так как ____ , причем коэффициент подобия равен ____ , так как ____________ . По теореме об отношении площадей подобных треугольников имеем: $S_{EOF} : S_{LAK} =$ ____ , откуда $S_{EOF} =$ ____________ $=$ ____________ $\text{см}^2 =$ $=$ ____ см^2.

О т в е т. б) ____ см^2.

32

Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (задача 101 учебника).



Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть M, N, P и Q — середины ребер DA, DC, BC и AB тетраэдра $DABC$. Тогда отрезки MQ и NP — средние ______________________________ , и поэтому $MQ \parallel$ ____ и $MQ =$ ______ , $NP \parallel$ ____ и $NP =$ ____ . Следовательно,

$MQ \parallel$ ______ и $MQ =$ ______ , и, значит, четырехугольник $MNPQ$ — ______________________________ , а отрезки MP и NQ — его ____________________ . Отсюда следует, что отрезки MP и NQ, соединяющие середины противоположных ребер ______ и ______ , ______ и ______ тетраэдра $DABC$, пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

2) Теперь рассмотрим отрезки NQ и EF, соединяющие середины противоположных ребер CD и AB, BD и AC. Как и в п. 1, можно доказать, что четырехугольник $ENFQ$ — ____________________ и, следовательно, его диагонали EF и NQ пересекаются ____________________________ , т. е. в точке ____

Итак, точка O является серединой отрезков MP, NQ и EF, что и требовалось доказать.

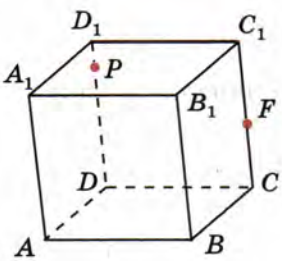
33

На ребрах DD_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки P и F. Постройте точку пересечения:

а) прямой PF с плоскостью ABC;

б) прямой BF с плоскостью $A_1B_1C_1$.

Решение.



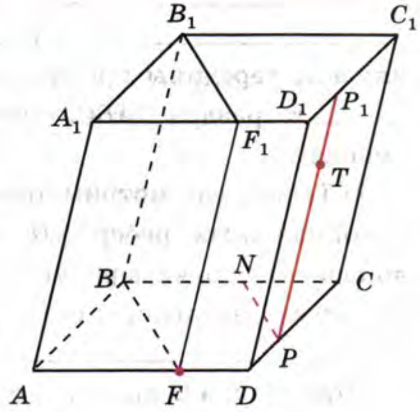
а) Поскольку точки P и F лежат в плоскости DD_1C_1, то прямая PF ______________________________ , и так как на рисунке прямые PF и DC не параллельны, то прямая PF пересекает прямую ______ , а значит, и ____________________ в некоторой __________

б) Поскольку точки B и F лежат в ____________________ , то прямая ______________________________ . Прямые BC и B_1C_1 также лежат в ____________________ , причем эти прямые ____________________ и прямая BF пересекает прямую ____ в точке ____ . Поэтому прямая BF ______________________________ .

А так как прямая B_1C_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, то и точка ____ лежит в этой плоскости. Следовательно, прямая BF пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ в точке ____

34

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка F лежит на ребре AD, T — внутренняя точка грани CC_1D_1D.



а) Через точку T проведите плоскость α, параллельную плоскости B_1BF.

б) Постройте линию пересечения плоскости α с плоскостью AA_1D_1.

Решение.

а) Проведем $PT \parallel$ _____ и $PN \parallel$ _____. Прямые PT и PN задают ______________

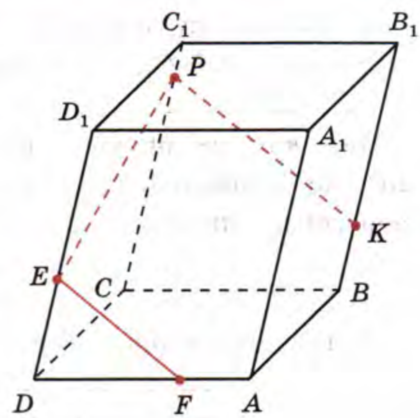
____

б) Прямая NP — линия пересечения плоскостей α и ______, причем прямая NP пересекает прямую AD в некоторой точке Q, и так как прямая AD лежит в плоскости AA_1D_1, то точка Q является общей точкой двух плоскостей α и AA_1D_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой QQ_1, проходящей через точку Q и параллельной прямой _____

Итак, QQ_1 — линия пересечения плоскостей ___ и _______

35

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки F, P и E лежат на ребрах AD, CC_1 и DD_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью FPE.



Решение. Грани ADD_1A_1 и CDD_1C_1 пересекаются с плоскостью FPE по отрезкам _____ и _____. Плоскость FPE пересекает грань CC_1B_1B по отрезку PK прямой, проходящей через точку P и параллельной прямой _____ грани AA_1D_1D, так как грани ______________ параллельны. На рисунке прямая PK пересекает ребро BB_1 в некоторой точке ___. Аналогично плоскость FPE пересекает грань AA_1B_1B по отрезку прямой, проходящей через точку ___ и параллельной прямой _____ грани _______, а ребро AB в некоторой ____________

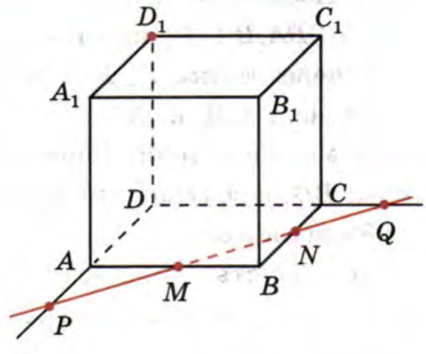
Итак, пятиугольник FEP_____ — искомое сечение.

36

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB и BC отмечены точки M и N.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью D_1MN.

б) Постройте линию пересечения секущей плоскости и плоскости BD_1B_1.



Решение.

а) Пусть прямая MN пересекает продолжения ребер AD и DC в точках P и Q. Тогда прямые PD_1 и QD_1 пересекают ребра ________ в некоторых точках ______

Итак, искомое сечение — ____________

____

б) Плоскости D_1MN и BDD_1 имеют общую точку _____ , а потому по аксиоме _____ пересекаются. ______________________

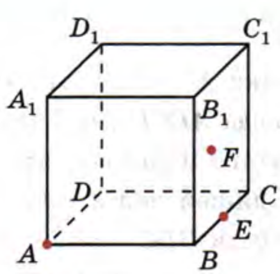
____

____

37

а) Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью AEF, где точка E принадлежит ребру BC, а F — внутренняя точка грани DCC_1D_1.

б) Укажите точку пересечения диагонали DB_1 параллелепипеда с секущей плоскостью.



Решение.

а) Пусть прямая AE пересекает продолжение ребра _____ в некоторой точке ____ , тогда прямая _____ лежит в плоскости ________ и пересекает ребра ____________ в некоторых точках ____________

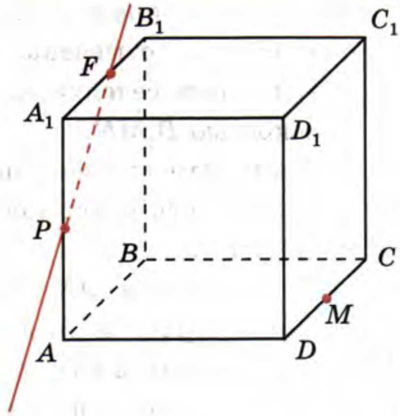
Итак, искомое сечение — ______________________

б) Пусть прямые BD и AE пересекаются в некоторой точке P. Тогда прямые _____ и _____ лежат в плоскости DBB_1 и ______________

____

____

38



а) Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, F и M — середины ребер AA_1, A_1B_1 и DC.

б) Укажите точку пересечения диагонали BD_1 с секущей плоскостью.

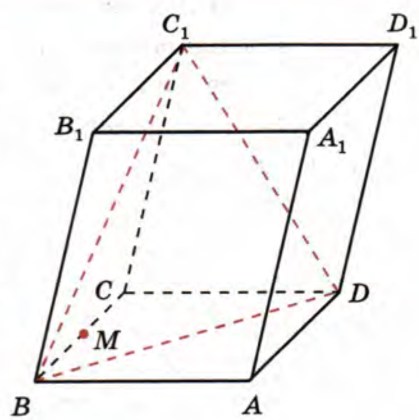
Решение.

а) Пусть прямая FP пересекает ______________________________

Итак, искомое сечение — ______________________________

б) ______________________________

39



Точка M лежит на ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1 (задача 115 учебника).

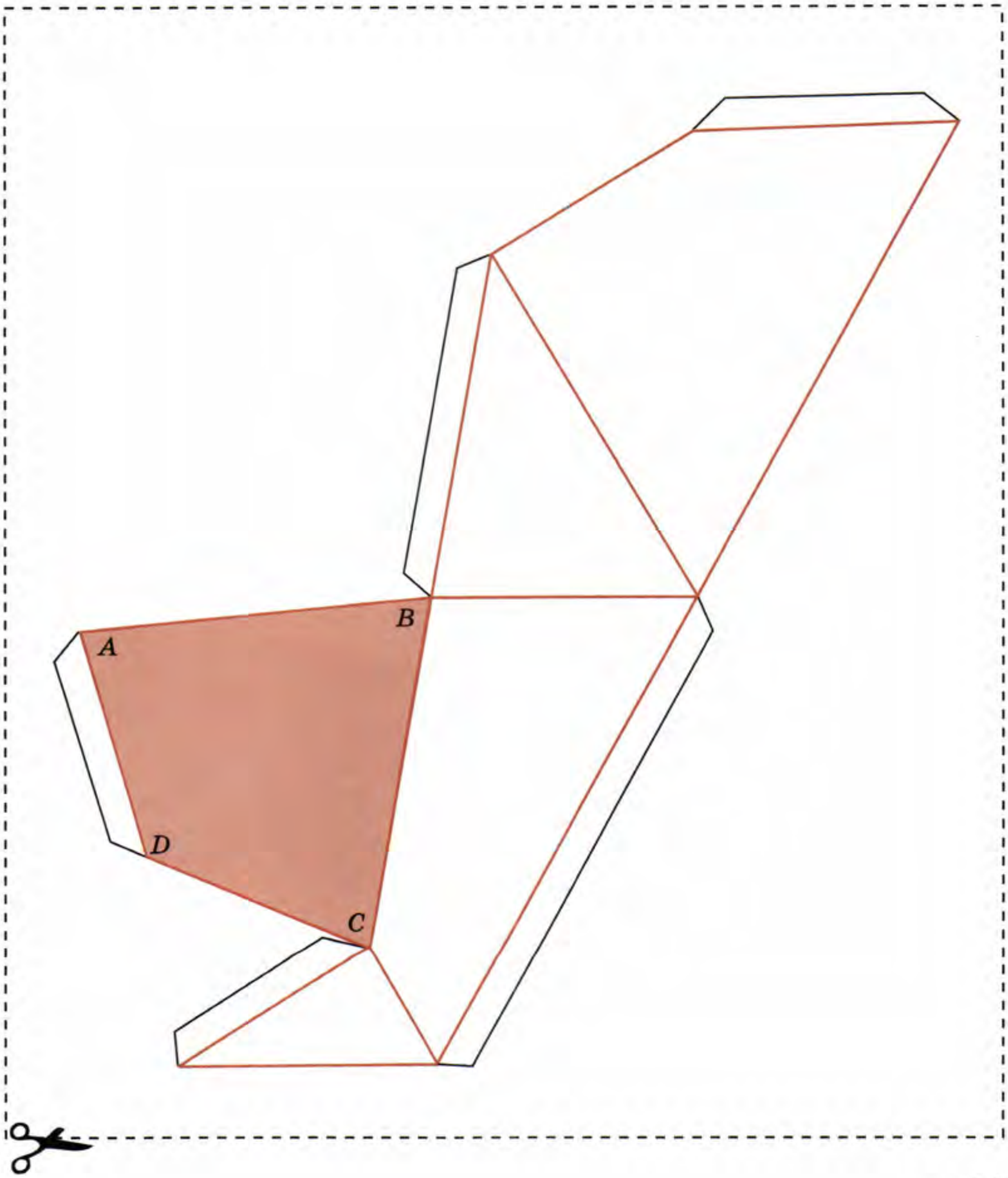
Решение. В плоскости BB_1C_1 через точку M проведем прямую ME, параллельную ______, $E \in CC_1$, а в плоскости ABC через __________ проведем прямую, ______________________________ и пересекающую _____ в точке F. Плоскость MEF параллельна плоскости __________ по ______________________________

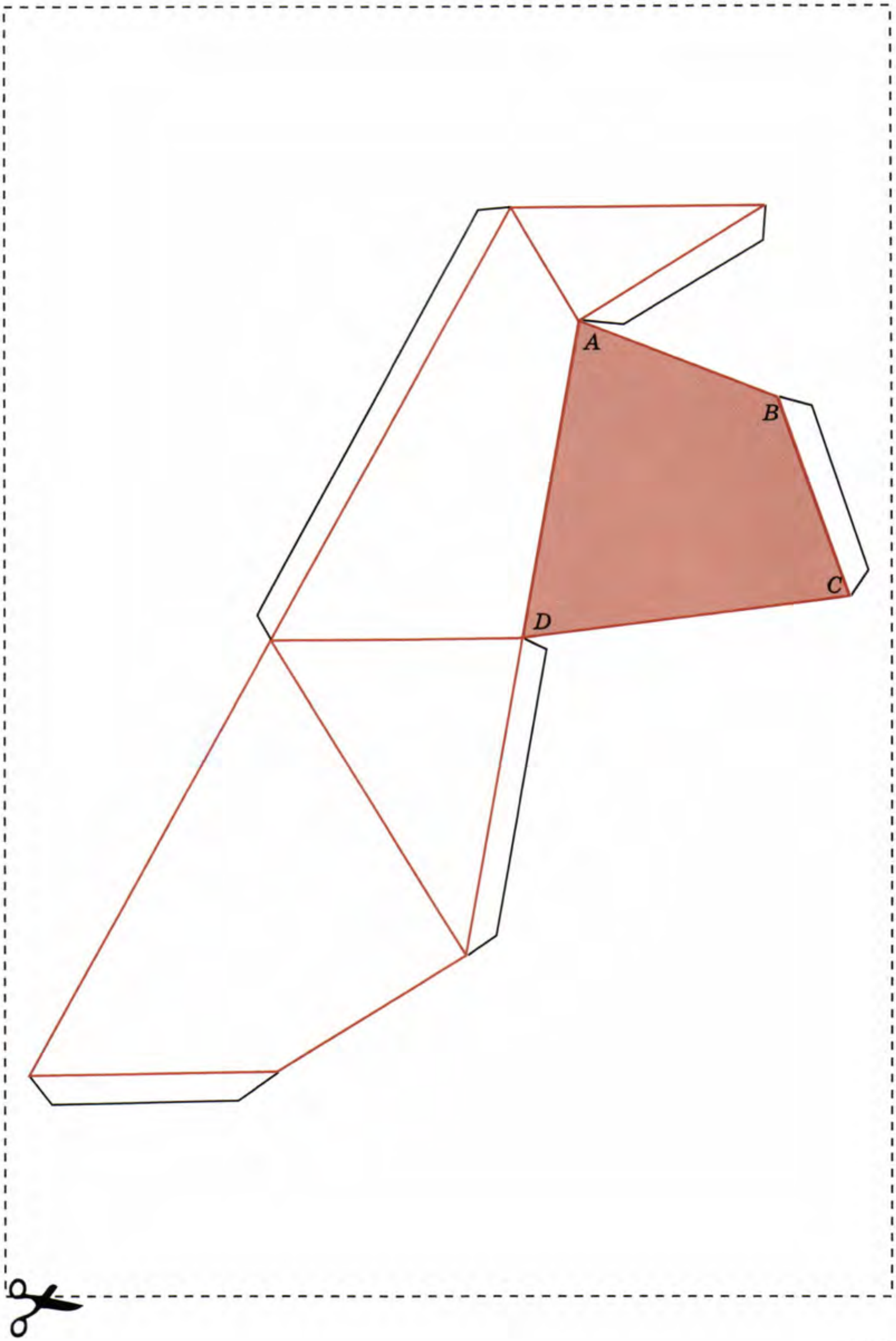
Следовательно, искомое сечение — треугольник MEF.

40

Отрежьте по штриховой линии часть листа с разверткой и наклейте ее на тонкий картон или плотную бумагу. Вырежите развертку, аккуратно согните по линиям и склейте. Вырежите и склейте развертку, изображенную на следующей странице.

Получится две части тетраэдра, рассеченного плоскостью. Сложите из них тетраэдр с сечением $ABCD$.

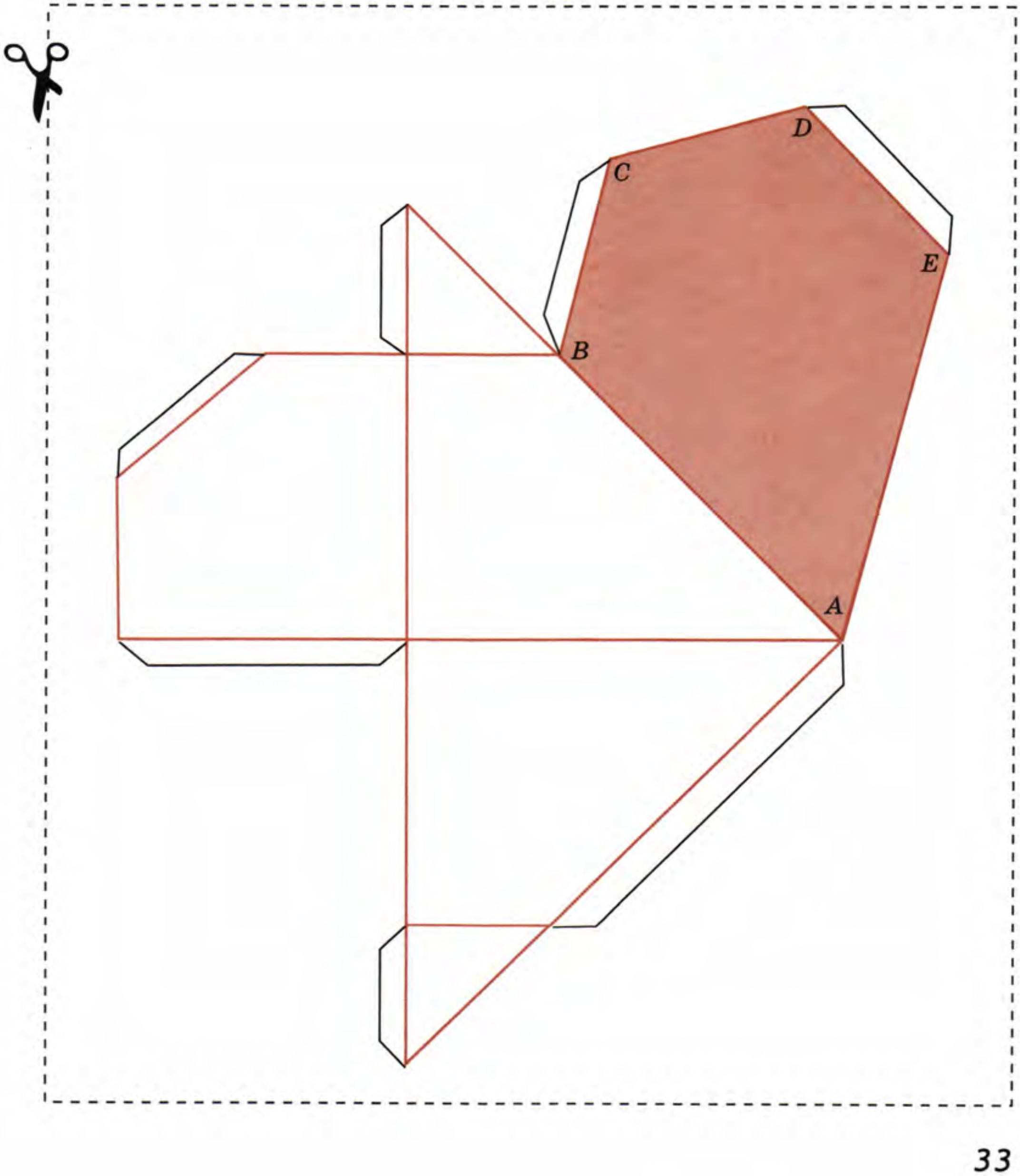


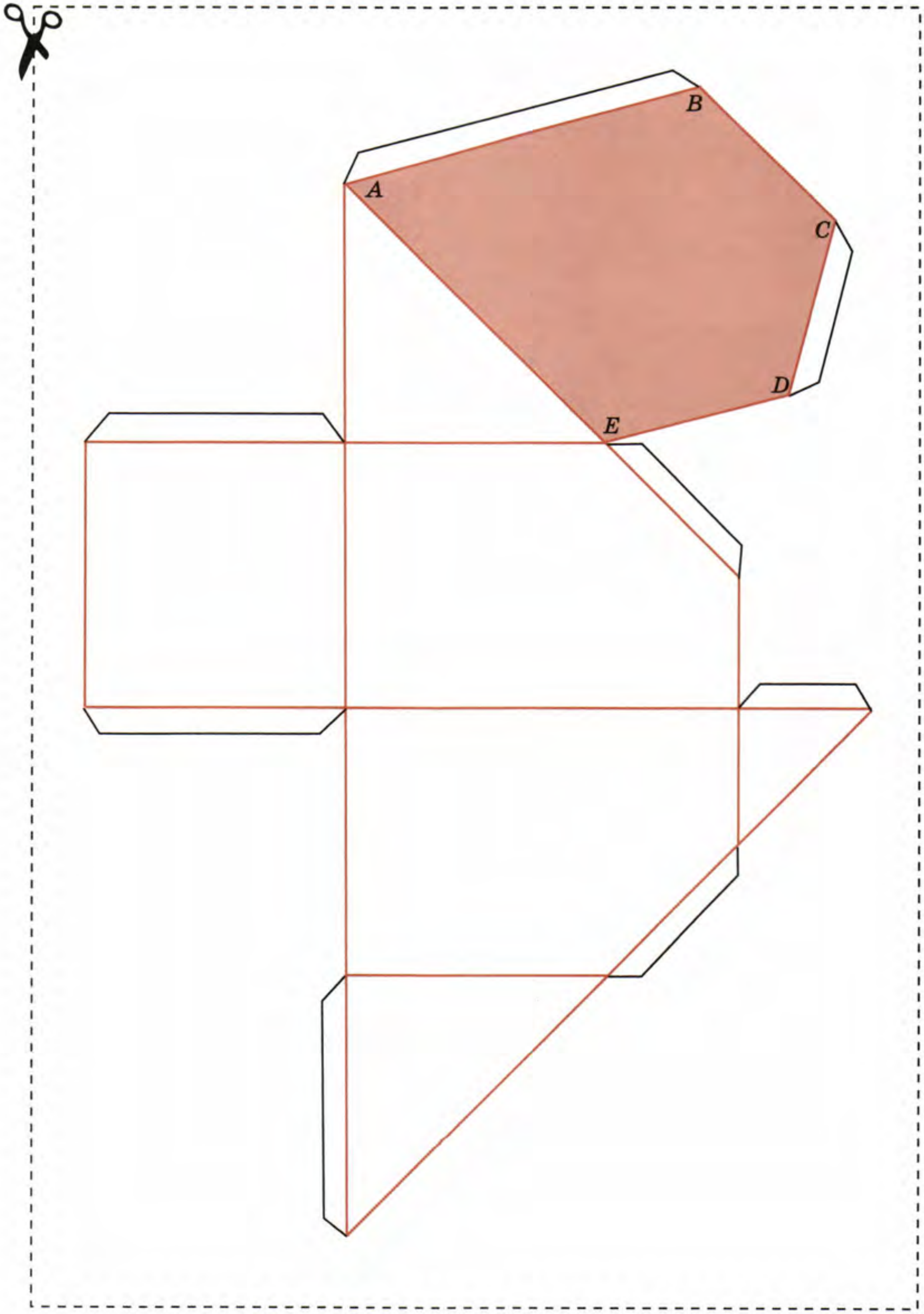

A
B
C
D

41

Отрежьте по штриховой линии часть листа с разверткой и наклейте ее на тонкий картон или плотную бумагу. Вырежите развертку, аккуратно согните по линиям и склейте. Вырежите и склейте развертку, изображенную на следующей странице.

Получится две части параллелепипеда, рассеченного плоскостью. Сложите из них параллелепипед с сечением $ABCDE$.




B
A
C
D
E

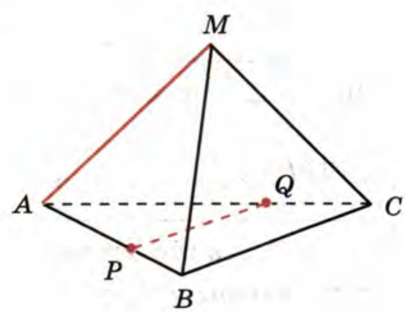
Глава II

Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

42

В тетраэдре $MABC$ ребра MA и BC перпендикулярны, P — точка ребра AB, причем $AP : AB = 2 : 3$, Q — точка ребра AC и $AQ : QC = 2 : 1$. Докажите, что $MA \perp PQ$.



Доказательство. $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, так как ______________________________ ______________________________. Поэтому $PQ \parallel$ _____, и угол между прямыми MA и PQ ________________, т. е. $MA \perp$ _____

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости)

Если прямая перпендикулярна к двум ____________________ ***прямым,*** ____, ***то она*** ____

Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, прямые p и q лежат в плоскости α и пересекаются в точке O (рис. *а*).

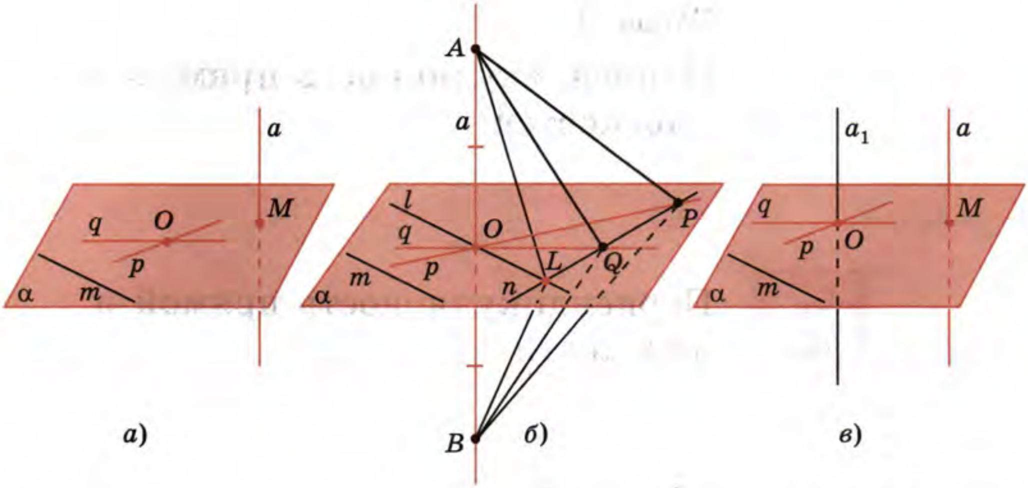
Доказать: $a \perp \alpha$.

Доказательство. Для доказательства перпендикулярности прямой a и плоскости α надо доказать, что $a \perp m$, где m —

____

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $O \in a$, $l \parallel m$ и $O \in l$, прямая n пересекает прямые p, q и l в точках P, Q, L, $OA = OB$ (рис. *б*). Так как прямые p и q — серединные



а)   б)   в)

______________________________________, то $AP =$ ____ и $AQ =$ ____, и, следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по ______________________. Поэтому $\angle APQ =$ ________. Далее $\triangle APL = \triangle BPL$ по ______________________________________, поэтому $AL =$ ____, а это означает, что $\triangle ABL$ — ______________ и его медиана LO является __________, т. е. $LO \perp AB$ или $l \perp$ ___. Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то по лемме ______________________________ $m \perp$ ___. Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой плоскости α, а это означает, что ________

2) Пусть $O \notin a$ (рис. *в*). Проведем $a_1 \parallel a$, $O \in a_1$. Тогда $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$ по лемме ______________________________ и, следовательно, $a_1 \perp \alpha$ согласно ______________________. Итак, одна из параллельных прямых a и a_1 перпендикулярна ______________, поэтому и вторая прямая ______________________, т. е. $a \perp$ ___. Теорема доказана.

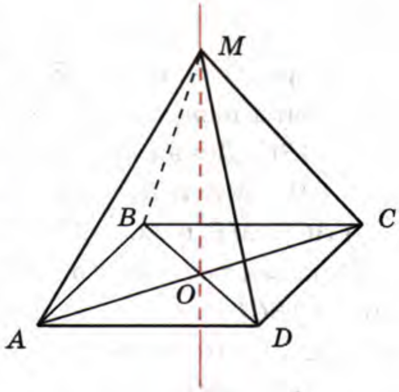
43

Через точку O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ проведена прямая OM, перпендикулярная к плоскости ромба, причем $OM = 6$ см, $AC = 16$ см, $BD = 4\sqrt{3}$ см. Найдите:

а) расстояние от точки M до вершин ромба;

б) расстояние от точки M до стороны DC.

Решение. а) Четырехугольник $ABCD$ — ромб, а отрезки AC и BD — его диагонали, пересекающиеся в точке O, поэтому $OA =$ _____ , $OB =$ _____ . Так как $MO \perp ABC$, то $MO \perp$ _____ и $MO \perp$ _____ . В треугольниках AMC и BMD медиана MO является и ____________ , поэтому эти треугольники ________________________ , т. е. ______________________________ .



Из прямоугольного треугольника AOM с катетами 6 см и 8 см имеем: $MA =$ _____ .
Из прямоугольного треугольника BOM находим: $MB =$ _______________ см.

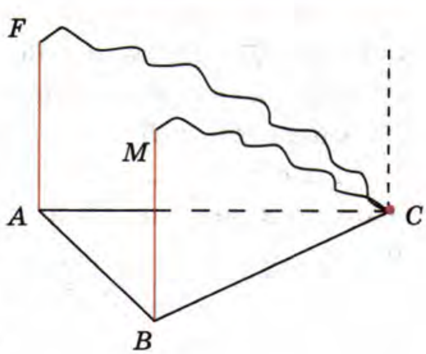
Итак, $MA = MC =$ _______ , $MB = MD =$ _______

б) В треугольнике DMC проведем $MP \perp DC$ и рассмотрим плоскость MOP. Прямая DC перпендикулярна к двум пересекающимся прямым _____ и _____ этой плоскости, следовательно, по ____ $DC \perp$ _____ , а потому перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности $DC \perp OP$. $\triangle COD$ прямоугольный, так как ____________________ , OP — его высота, поэтому $OP = \dfrac{CO \cdot OD}{DC} =$ ____________ = _________

Ответ. а) ________ ; б) ________

44

На рисунке $AF \perp ABC$, $BM \perp ABC$. Докажите, что линия пересечения плоскостей AFC и BMC параллельна прямым AF и BM.



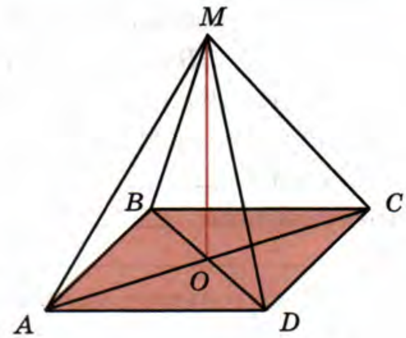
Доказательство. Так как $AF \perp ABC$ и $BM \perp ABC$, то $AF \parallel$ _____ , и, следовательно, $AF \parallel BMC$ по ____ . Плоскость AFC проходит через прямую AF, параллельную плоскости ______ , и пересекает эту плоскость. Следовательно, линия пересечения плоскостей ____________ параллельна прямой _____ . А так как $AF \parallel BM$, то по ____ прямая BM также параллельна ____

45

Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей, $OM \perp ABC$. Докажите, что:

а) $BD \perp MA$ и $BD \perp MC$;

б) $AC \perp MB$ и $AC \perp MD$.



Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, поэтому $AC \perp$ ____. По условию $MO \perp ABC$, следовательно, $MO \perp$ ____ и $MO \perp$ ____

а) Рассмотрим плоскость AMC. Прямая BD перпендикулярна к двум пересекающимся прямым ________ этой плоскости, следовательно, по

____

$BD \perp$ ____, а потому прямая BD перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности $BD \perp$ ____ и $BD \perp$ ____

б) Рассмотрим плоскость BMD. ________________

____

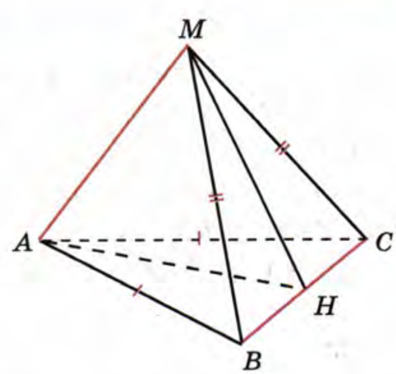
____

____

____

46

В тетраэдре $MABC$ $AB = AC$, $MB = MC$. Докажите, что $BC \perp AM$.



Доказательство. По условию треугольники BAC и BMC — ________ ____ с общим ________, поэтому их медианы AH и MH, проведенные к ________, являются ________, т. е. $AH \perp$ ____ и ________

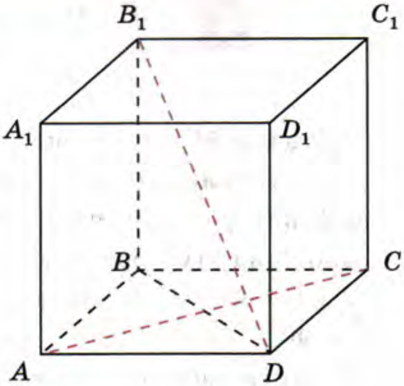
Рассмотрим плоскость AMH. Так как $BC \perp AH$ и $BC \perp$ ____, то по

____

$BC \perp AMH$, а потому прямая BC перпендикулярна к любой ________________, в частности $BC \perp$ ____

47

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что диагональ куба B_1D перпендикулярна к диагонали AC его основания.



Доказательство. Так как грани AA_1B_1B и BB_1C_1C — квадраты, то $B_1B \perp BA$ и $B_1B \perp BC$. Следовательно, $B_1B \perp ABC$ по ________________________

____

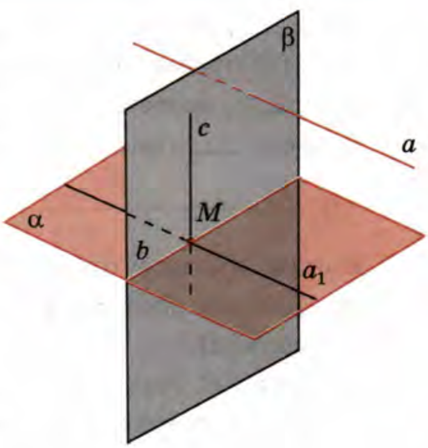
____________. Рассмотрим плоскость B_1BD. Поскольку $AC \perp BD$, так как ____________________________________

________________________, и $AC \perp B_1B$, так как ______________, то $AC \perp$ ______ по ________________________

____, а потому $AC \perp$ ______

48

Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой (задача 137 учебника).



Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, причем $a \perp b$. Докажем, что через прямую b проходит плоскость, перпендикулярная к прямой a. Возьмем на прямой b какую-нибудь точку M и проведем через нее прямую a_1, параллельную прямой a. Так как $a_1 \parallel a$ и $a \perp b$, то $a_1 \perp$ ____. Пересекающиеся прямые a_1 и b определяют некоторую плоскость α. Пусть прямая c проходит через точку M и перпендикулярна к плоскости α. Тогда $c \perp b$ и $c \perp$ ____. Пересекающиеся прямые b и c определяют некоторую плоскость β. Поскольку $a_1 \perp b$ и $a_1 \perp c$, то $a_1 \perp$ ____ по ________________________

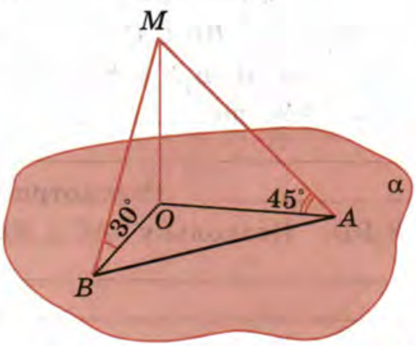
____________________________________, а так как $a \parallel a_1$, то $a \perp$ ____

Итак, плоскость β проходит через прямую b и перпендикулярна к ____________. Аналогично доказывается, что через прямую a проходит ____________________________________

§ 2 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

49

Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MO и две наклонные MA и MB, которые образуют со своими проекциями на эту плоскость $\angle MAO = 45°$, $\angle MBO = 30°$, угол между наклонными равен $90°$.



Найдите расстояние между основаниями наклонных, если проекция наклонной MA равна $\sqrt{3}$ см.

Решение. $MO \perp \alpha$, поэтому $MO \perp$ _____ и $MO \perp$ _____ . $\triangle AMO$ прямоугольный и равнобедренный: $\angle O =$ _____ , $\angle A = \angle$ ___ $=$ _____ , $AO =$ _______ , следовательно, $MO =$ _______ , $AM =$ _______ . $\triangle BMO$ прямоугольный: $\angle O =$ _____ , $\angle B =$ _____ , $MO =$ _______ , поэтому $MB = 2$ _____ $=$ _____ см.

$\triangle AMB$ прямоугольный: $\angle M =$ _____ , $AM =$ _______ , $BM =$ $=$ ________ , поэтому $AB =$ ______________ $=$ __________ $=$ _____ см.

Ответ. _____ см.

50

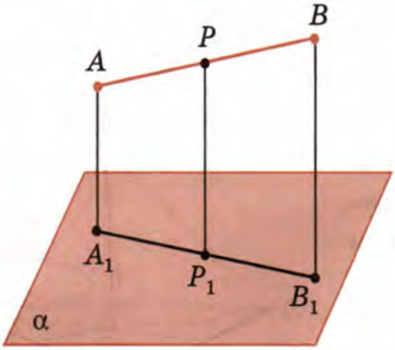
Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α (задача 142 учебника).

Решение. Рассмотрим два случая:

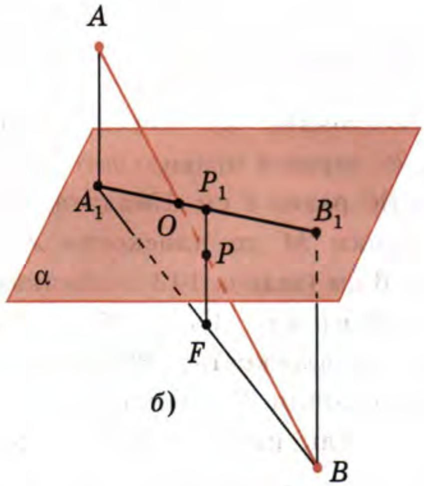
1) концы отрезка находятся по одну сторону от плоскости α;

2) концы отрезка находятся по разные стороны от плоскости α.

1) Пусть отрезок AB расположен по одну сторону от плоскости α (см. рис. *а*), $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 = 1$ см, $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 = 4$ см. Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel$ _____ , и поэтому четырехугольник A_1ABB_1 — ______________ . Проведем в ней среднюю линию PP_1, тогда $PP_1 \parallel$ _____ , $PP_1 \parallel$ _____ , и так как $AA_1 \perp \alpha$, то и $PP_1 \perp$ ___ . Следовательно, длина отрезка PP_1 и есть искомое расстояние от середины отрезка AB до плоскости α, $PP_1 = \frac{1}{2}$ ______________ $=$ ________________ $=$ $=$ _____ см.



а)



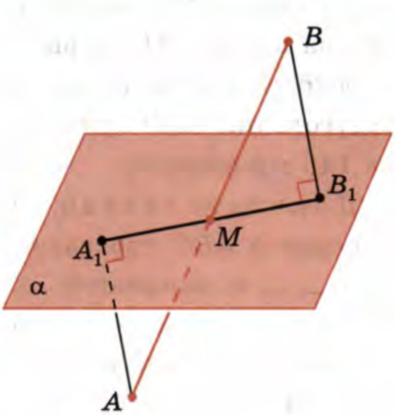
б)

2) Пусть концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α (см. рис. *б*) и пусть AA_1 и BB_1 — перпендикуляры к плоскости α, $AA_1 = 1$ см, $BB_1 = 4$ см. Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel$ ______, и прямые AA_1, BB_1, A_1B_1 лежат в одной ______________. Проведем через точку P — середину отрезка AB — прямую, параллельную B_1B. Тогда по ______________________________ точки P_1 и F пересечения этой прямой с прямыми A_1B_1 и A_1B будут серединами отрезков ______ и ______, а отрезки P_1F и PF — средними ______________ ______________________________. $P_1P = P_1F -$ ______ $=$ $=$ ______________ $=$ ______ см.

Ответ. ______ см или ______ см.

51

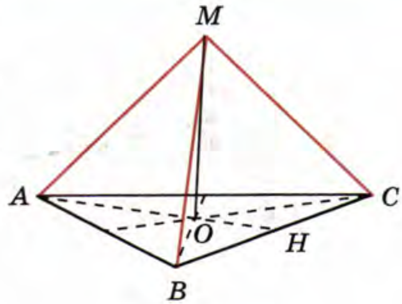
Докажите, что концы данного отрезка находятся на одинаковом расстоянии от любой плоскости, проходящей через его середину.



Доказательство. Пусть плоскость α проходит через середину M отрезка AB, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Тогда $AM = MB$, $\angle AMA_1 = \angle BMB_1$ и ______
____
____
____
____

52

Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см (задача 143 учебника).



Решение. Пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC, тогда расстояние от точки M до плоскости α равно _____ . Так как $MO \perp \alpha$, то $MO \perp OA$, $MO \perp$ _____ , $MO \perp$ _____ . $\triangle AOM =$ __________ $=$ __________ по

____

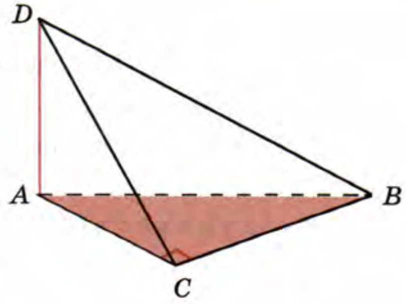
____

____________________ , следовательно, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от ____________________ и, значит, является центром этого треугольника. Поэтому $AO =$ _______ $=$ __________ $=$ _____ (см), и из прямоугольного треугольника AMO находим: $MO =$ __________ $=$ __________ (см) $=$ $=$ ___ см.

Ответ. ___ см.

53

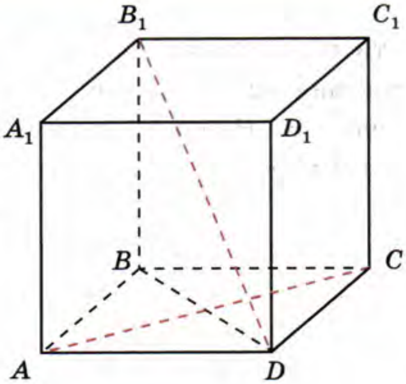
Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что треугольник CBD прямоугольный (задача 145 а учебника).



Доказательство. Из точки D к плоскости ABC проведены перпендикуляр _____ и наклонная _____ . Прямая BC лежит в плоскости ABC и перпендикулярна к проекции _____ наклонной _____ на эту плоскость, поэтому, согласно ______________________________ , $BC \perp DC$, т. е. треугольник CBD ____________________

54

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является ромб $ABCD$, а боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания. Докажите, что диагональ B_1D параллелепипеда перпендикулярна к диагонали AC его основания.

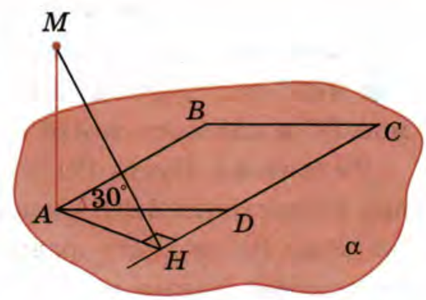


Доказательство. $BB_1 \perp ABC$ ______________, диагональ B_1D — наклонная к плоскости ABC, BD — проекция ______________________________ ______________________, диагональ AC лежит в плоскости ABC, $AC \perp BD$, так как ______________ ____.

Следовательно, согласно теореме ______________________________, $AC \perp$ ______

55

Сторона ромба $ABCD$ равна 12 см, $\angle A = 30°$, $AM \perp ABC$, $AM = 6$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой CD.



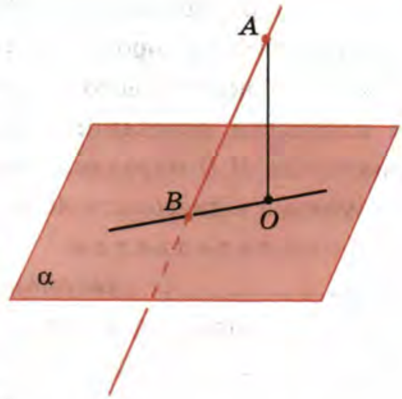
Решение. Из вершины A ромба $ABCD$ проведем отрезок $AH \perp DC$. Так как $\angle ADC =$ ______ — тупой, то основание H перпендикуляра AH лежит на продолжении луча ____ . Таким образом, из точки M к плоскости ABC проведены перпендикуляр MA и наклонная MH, при этом прямая CD плоскости ______ перпендикулярна к проекции ____ наклонной ____ . Поэтому, согласно ______________________ ______________________________, $CD \perp$ ____ . Итак, длина перпендикуляра MH и есть расстояние от точки ___ до прямой ____

$\triangle AHD$ ______________________, $\angle ADH =$ ______ , $AD =$ ________ , поэтому $AH =$ ___ см. $\triangle MAH$ ______________________________, так как ______________ и $AM =$ ______ , $AH =$ ___ см, поэтому $MH =$ ______ см.

Ответ. ______ см.

56

Через точку A, удаленную от плоскости α на расстояние $\sqrt{3}$ см, проведена прямая, пересекающая плоскость α в точке B. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, если $AB = 2$ см.

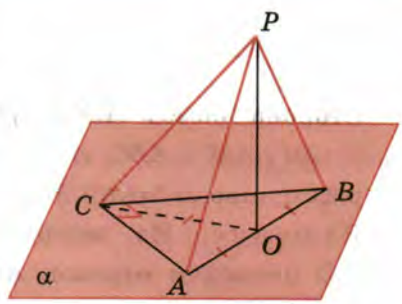


Решение. Пусть отрезок AO — перпендикуляр к плоскости α. Тогда $AO =$ = ______ , прямая OB — проекция ______________________________ , а угол между прямой AB и плоскостью α равен $\angle$ ______ . Из прямоугольного треугольника AOB находим: $\sin \angle ABO =$ ______ = ______ , следовательно, $\angle ABO =$ ______

Ответ. ______

57

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Точка P не лежит в плоскости ABC и удалена от каждой вершины треугольника на расстояние $4\sqrt{3}$ см. Найдите угол между прямой PC и плоскостью ABC.



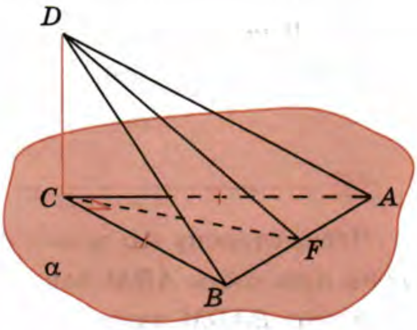
Решение. Пусть PO — перпендикуляр к плоскости ABC. Поскольку отрезки PA, PB и PC — равные наклонные, проведенные из ______ к ______________ , то их проекции тоже ______ , т. е. $OA =$ ______ = ______ , а потому точка O — центр окружности, ______________________________ . Следовательно, точка O — середина ______________ . Так как $AB =$ ______ , то $CO = \frac{1}{2}$ ______ = ______ см.

Искомый угол φ между прямой ______ и плоскостью ______ есть угол между ______________________________ , т. е. $\varphi = \angle$ ______ . $\triangle POC$ прямоугольный, так как ______________ , $PC =$ ______ , $CO =$ ______ см, поэтому $\cos \varphi =$ ______ = ______ = = ______ . Отсюда получаем, что $\varphi =$ ______

Ответ. ______

§ 3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

58

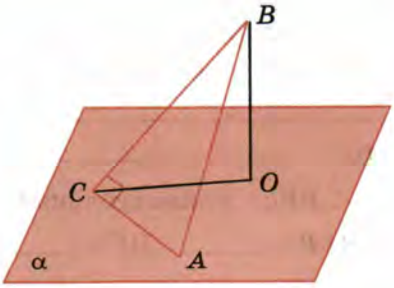


К плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 12\sqrt{3}$ см проведен перпендикуляр DC, равный 18 см. Найдите угол между плоскостями DAB и CAB.

Решение. Треугольники ABC и ADB равнобедренные: $\triangle ABC$ ____________ ____________, а в $\triangle ADB$ $DA =$ ____, так как эти стороны — ____________ ____________________________ ____________________________ ____________. Поэтому медианы CF и DF этих треугольников, проведенные из вершин C и D к общему основанию ____, являются ____________, и, следовательно, $\angle DFC$ — линейный угол ________________________, а значит, угол между плоскостями DAB и CAB равен $\angle$ ______. $\triangle DCF$ прямоугольный, $DC =$ ______, $CF = \frac{1}{2}$ ____ $=$ ______ см и поэтому $\operatorname{tg} \angle DFC =$ ______ $=$ ______ $=$ $=$ ____, откуда $\angle DFC =$ ____

Ответ. ____

59



Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен 60°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (задача 172 учебника).

Решение. Проведем перпендикуляр BO к плоскости α. Отрезок BC — наклонная к ____________________, отрезок OC — проекция наклонной ____ на ____________, а прямая AC, лежащая в плоскости α, перпендикулярна к наклонной BC. Следовательно, согласно ________________________________,

$AC \perp OC$. Таким образом, $\angle BCO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и ABC, и, значит, $\angle BCO =$ ____

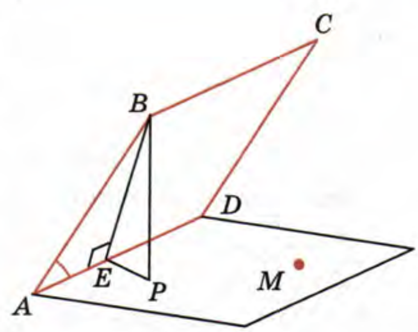
$\triangle ABC$ прямоугольный: $\angle C =$ ____, $AC =$ ____, $AB =$ ____, поэтому $BC =$ ____

$\triangle BCO$ прямоугольный: $\angle O =$ ____, $\angle BCO =$ ____, $BC =$ ____, следовательно, $BO =$ ____ см $=$ ____ см $=$ ____ см.

Ответ. ____ см.

60

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен $60°$. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$ (задача 176 учебника).



Решение. Проведем перпендикуляр BP к плоскости ADM. Искомое расстояние от точки B до плоскости ADM равно BP. Проведем высоту ромба BE. Тогда получим, что из точки B к плоскости ADM проведены перпендикуляр ____ и наклонная ____

Следовательно, отрезок PE — проекция ____ на ____

Прямая AD, лежащая в плоскости ADM, перпендикулярна к наклонной BE, а потому, согласно ____, $AD \perp$ ____, и $\angle BEP$ — линейный угол ____, т. е. $\angle BEP =$ ____

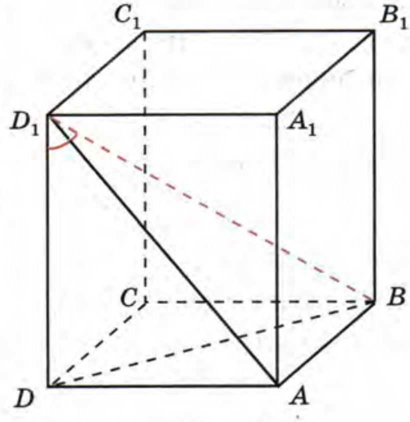
$\triangle BPE$ прямоугольный, так как ____, причем $\angle BEP =$ ____, $BP =$ ____, поэтому $BE =$ ____ $=$ ____ $=$ ____

$\triangle BAE$ прямоугольный: $\angle E =$ ____, $\angle A =$ ____, $BE =$ ____, следовательно, $AB =$ ____ $=$ ____

Ответ. ____

61

Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если его диагональ $BD_1 = 24$ см и составляет с плоскостью грани DAA_1 угол в 45°, а с ребром DD_1 — угол в 60°.

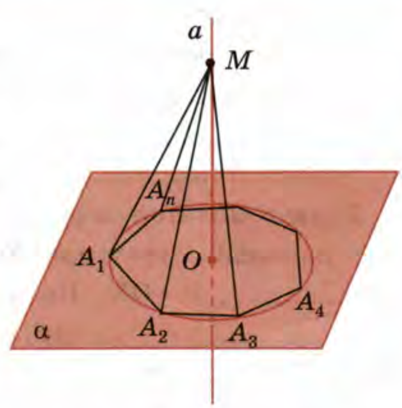


Решение. Все грани прямоугольного параллелепипеда — ______________________ , поэтому $BA \perp$ ______ , $BA \perp$ ______ , и, следовательно, $BA \perp DAA_1$. Прямая BD_1 пересекает плоскость DAA_1 в точке _____ , а прямая AD_1 — проекция ______ на эту плоскость, поэтому $\angle AD_1B$ — это угол между диагональю _____ и __________________________ . По условию $\angle AD_1B =$ _____ . Из прямоугольного треугольника AD_1B, в котором $\angle A =$ _____ , $D_1B =$ _________ и $\angle D_1 =$ _____ , находим: $AB = AD_1 =$ $=$ _________ $=$ _______ см. Из прямоугольного треугольника BD_1D, в котором $\angle D =$ _____ , $BD_1 =$ ________ , $\angle BD_1D =$ _____ по условию, получаем: $D_1D = \frac{1}{2}$ _______ $=$ _____ см. Из треугольника AD_1D, в котором $\angle D =$ _____ , $AD_1 =$ ____________ , $DD_1 =$ ________ , находим: $AD =$ _____ см.

Ответ. ____________________________

62

Докажите, что любая точка прямой, которая проходит через центр окружности, описанной около многоугольника, и перпендикулярна к плоскости многоугольника, равноудалена от вершин этого многоугольника (задача 200 учебника).

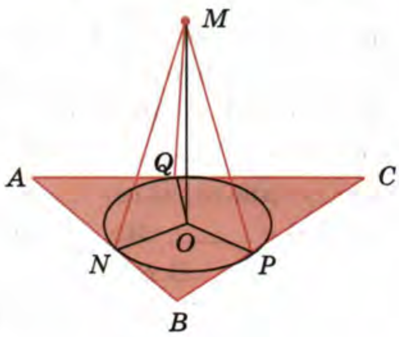


Доказательство. Пусть прямая a проходит через центр O окружности, описанной около многоугольника $A_1A_2...A_n$, и перпендикулярна к плоскости α этого многоугольника. Ясно, что точка O равноудалена от вершин многоугольника, так как является центром описанной около него окружности: $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Пусть M — произвольная точка прямой a, отличная от точки O. Тогда

MO — перпендикуляр, MA_1, MA_2, ..., MA_n — ____________________, проведенные из точки ___ к ______________________________, а OA_1, OA_2, ..., OA_n — проекции наклонных на ______________________. Так как проекции равны, то равны и ______________________________, т. е. ______________________________. Таким образом, любая точка прямой a равноудалена от ____

63

В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Точка M удалена от прямых AB, BC и AC на 5 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если известно, что ее проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.



Решение. Пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC, а MN, MP и MQ — перпендикуляры к прямым AB, BC и AC. Требуется найти MO. По теореме, ____ ______________ имеем: $AB \perp ON$, $BC \perp$ _____ и $AC \perp$ _____. Итак, из точки M проведены к плоскости ABC перпендикуляр MO и наклонные MN, MP и MQ. По условию расстояния от точки M до прямых AB, BC и AC равны, т. е. равны наклонные _____, _____ и _____. Следовательно, потому равны и их проекции на эту плоскость: ____________________

Таким образом, точка O лежит внутри треугольника ABC и равноудалена от ____________________, поэтому она является ____

Радиус ON этой окружности найдем, используя формулу $S = pr$, где S — площадь треугольника ABC, p — его ____________________, $p =$ _________, $r = ON$. По формуле Герона $S =$ _________________________ $=$ $=$ ________________ $=$ _____ см^2, следовательно, $r =$ _____ $=$ _____ (см) $=$ _____ см. Итак, $NO =$ ___ см.

Треугольник MON ____________________________, поскольку _____ $\perp ABC$, и потому $MO \perp$ _____. Так как $MN =$ _______, $ON =$ _______, то из треугольника MON находим: $MO =$ ____________ $=$ ___ см.

Ответ. ___ см.

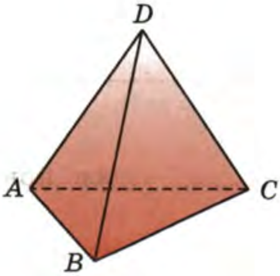
Глава III

Многогранники

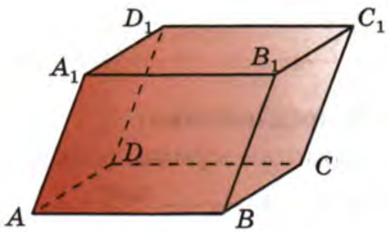
§ 1 Понятие многогранника. Призма

64

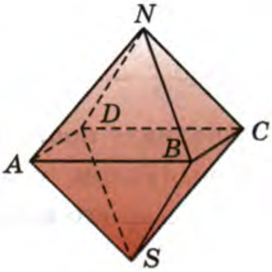
Сколько граней, ребер, вершин и диагоналей у каждого из изображенных на рисунке многогранников?



а) Тетраэдр



б) Параллелепипед



в) Октаэдр

Решение.

а) Тетраэдр $DABC$ составлен из ______ граней. Он имеет ______ ребер и ______ вершины. Диагональю многогранника называется __________, соединяющий две ____________, не принадлежащие ____________. У тетраэдра любые две вершины ______________ одной грани, следовательно, у него ______ диагоналей.

б) ______________________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составлен из _____ граней. Он имеет _____ ребер, _____ вершин и _____ диагонали (AC_1, ________________).

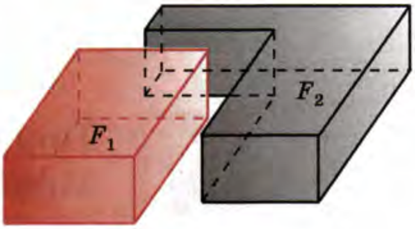
в) __________________ $NABCDS$ имеет ________________________ ______________ и ___ диагонали (AC, ____________).

65

Параллелепипед разрезали на два многогранника F_1 и F_2. Какой из получившихся многогранников выпуклый и какой невыпуклый?

Р е ш е н и е.

а) Многогранник F_1 — параллелепипед. Он расположен по одну сторону от плоскости ______________ его грани. Следовательно, F_1 — ______________ многогранник.



б) Верхняя грань многогранника F_2 является невыпуклым ______________ ______________, следовательно, F_2 — ______________ многогранник.

О т в е т.

F_1 — ______________ многогранник,

F_2 — ______________ многогранник.

66

Заполните пропуски в предложении:

В выпуклом многограннике сумма всех __________ углов при __________ его вершине __________ 360°.

67

Выпуклый многогранник имеет 8 вершин. Докажите, что сумма всех его плоских углов меньше 3200°.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как данный ______________ выпуклый, то сумма всех плоских __________ при __________ его вершине меньше ________, следовательно, сумма всех его плоских ____________ при восьми вершинах ______________ 360° · ___ = _______, а это ______________ 3200°, что и требовалось доказать.

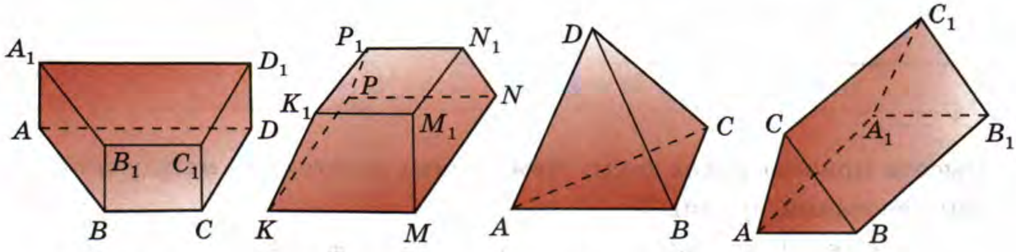
68

Заполните пропуски в определении призмы:

Многогранник, составленный из ______________ многоугольников $A_1A_2 ... A_n$ и $B_1B_2 ... B_n$, расположенных в ______________ плоскостях, и ___ параллелограммов, называется ______________

69

Какой из данных многогранников является призмой?



а) *б)* *в)* *г)*

Решение.

а) Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ многогранника ______________ равны и расположены в параллельных ______________ . Остальные _____ грани — параллелограммы. Следовательно, ______________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ____________ призмой.

б) Грань KK_1M_1M многогранника ______________ не является ______________________ . Следовательно, этот многогранник ______________ призмой.

в) У многогранника $ABCD$ нет граней, расположенных в ______________________ плоскостях. Следовательно, этот многогранник ______________ призмой.

г) Грани ABC и $A_1B_1C_1$ ______________ $ABCA_1B_1C_1$ — равные ______________ , расположенные в ______________ плоскостях. Остальные ___ грани являются ______________________ . Следовательно, многогранник $ABCA_1B_1C_1$ ______________ призмой.

70

Сколько граней, вершин и ребер имеет n-угольная призма?

Решение.

а) n-угольная призма состоит из _______ n-угольников (______________ призмы) и ___ параллелограммов (боковых __________), т. е. имеет ___ + ___ граней.

б) У каждого основания n-угольной ______________ имеется ___ вершин, а всего у призмы _____ вершин.

в) Каждое основание ________________ призмы имеет ___ сторон, кроме того, имеется ___ боковых _________. Следовательно, число всех ребер равно ___ · 2 + ___ = ____

Ответ. n-угольная призма имеет _______ граней, __________ ___________________________

71

Высота призмы равна 5 см. Чему равно расстояние между плоскостями оснований призмы?

Решение. Основания призмы расположены в ____________ ____________ плоскостях, а расстоянием между параллельными плоскостями называется ______________________ от произвольной ________ одной из параллельных __________________ до другой плоскости.

Расстоянием от данной точки до плоскости называется длина _________________________, проведенного из этой _________ к данной ____________________

Поскольку высотой призмы называется ____________________, проведенный из какой-нибудь точки одного __________________ к плоскости другого ____________________________, то длина высоты и есть искомое __________________________ между плоскостями оснований ______________

Ответ. ___ см.

72

Докажите, что все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

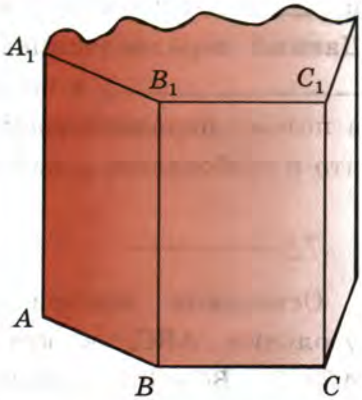
Доказательство.

1) Прямой призмой называется ____________, боковые ребра которой ________________________ к основаниям. Но если прямая перпендикулярна к плоскости, то по определению она ____________ _____________ к любой прямой, лежащей в этой __________________. Следовательно, боковые ребра прямой призмы __________________________ к сторонам основания.

2) Каждая боковая грань призмы является _________________________, а параллелограмм, смежные стороны которого взаимно перпендикулярны, является __________________________. Следовательно, все боковые грани прямой призмы — ______________________, что и требовалось доказать.

73

Докажите, что призма, две смежные боковые грани которой — прямоугольники, является прямой призмой.

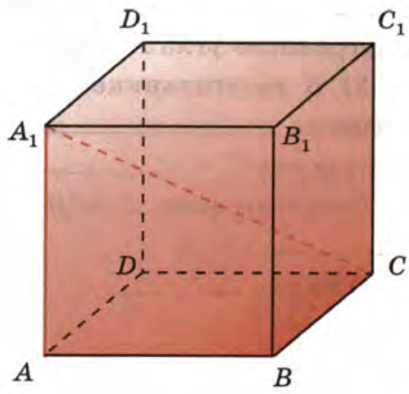


Доказательство.

Пусть боковые грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 — прямоугольники (на рисунке изображена часть призмы). Тогда прямая BB_1 ________________ к двум пересекающимся прямым AB и ____ плоскости основания, следовательно, ребро ____ перпендикулярно к основанию призмы. Так как все боковые __________ призмы параллельны, а ребро BB_1 ________________ к основанию призмы, то и все боковые ребра ________________ к основанию __________, а значит, призма является __________, что и требовалось __________

74

Постройте диагональное сечение прямого параллелепипеда (т. е. сечение, содержащее диагональ параллелепипеда и боковое ребро). Докажите, что построенное сечение является прямоугольником.



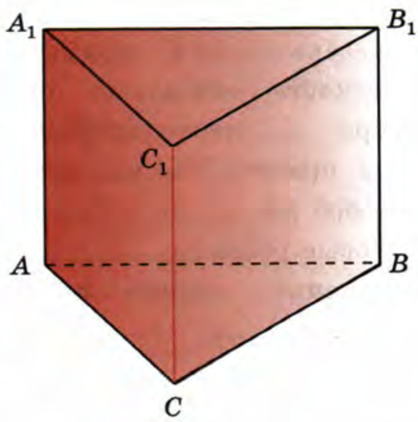
Решение.

1) Рассмотрим, например, сечение, содержащее диагональ A_1C и ребро AA_1. Секущая плоскость AA_1C имеет с плоскостью грани $ABCD$ две общие точки ___ и ___, следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ____, а отрезок ____ служит стороной сечения. Проведем этот отрезок.

Так как AA_1 ___ CC_1, то эти прямые лежат в плоскости сечения, а значит, отрезки AA_1 и ____ — стороны сечения. Наконец, отрезок ____ — четвертая сторона __________. Проведем этот отрезок. Итак, искомое сечение — четырехугольник __________

2) Так как боковые ребра параллелепипеда ________ и ________, то четырехугольник AA_1C_1C — ________. Данный параллелепипед прямой, поэтому ребро AA_1 ________ ________ к плоскости основания, следовательно, AA_1 ___ AC, а потому параллелограмм AA_1C_1C является ________, что и требовалось доказать.

75



Основание прямой призмы — треугольник ABC, в котором $AB = \sqrt{7}$, $AC = 2$, $BC = 3$. Найдите двугранный угол при боковом ребре CC_1.

Решение.

1) Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то ребро CC_1 ________ к плоскости ABC, а значит, AC ___ CC_1 и BC ___ CC_1 (по ________ прямой, перпендикулярной к плоскости). Следовательно, угол ACB является ________ углом искомого двугранного угла ACC_1B.

2) В треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 +$ ____ $- 2$ ____ $\cdot$ ____ $\cos C$ (теорема ________), т. е. $(\sqrt{7})^2 =$ ___ $+$ ___ $-$ ___, откуда $\cos C =$ ________ $=$ ___

Следовательно, $\angle ACB =$ ____, т. е. двугранный угол ACC_1B равен ________

Ответ. ________

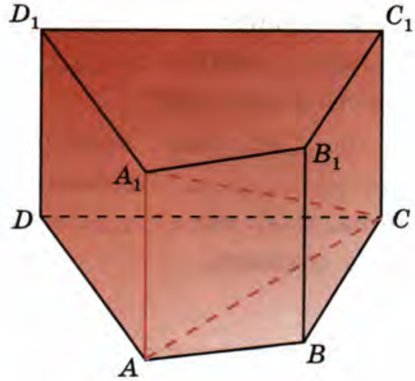
76

Диагональ AC основания прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 6 см, а высота призмы равна $6\sqrt{3}$ см. Найдите угол наклона диагонали A_1C к плоскости основания.

Решение.

1) Из определения прямой призмы следует, что ее боковое ребро ________ к плоскости ________ и равно высоте ________, т. е. $AA_1 = 6\sqrt{3}$ см.

2) Поскольку прямая AA_1 ________ ________________ к плоскости ABC, то прямая AC является ____________ прямой A_1C на плоскость ABC, и, следовательно, угол наклона ____________ A_1C к плоскости ABC равен углу ______



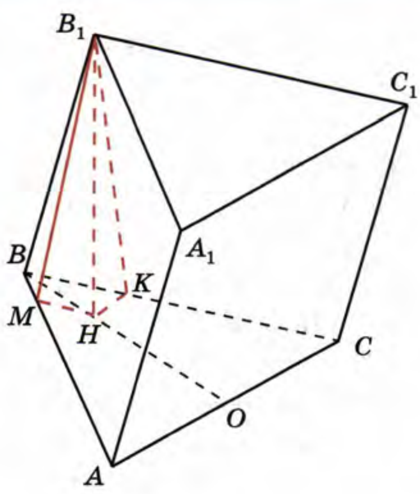
3) Поскольку прямая AA_1 ________ ______________ к плоскости ABC, то AA_1 ___ AC (по определению прямой, __________________ к плоскости). Из прямоугольного треугольника A_1AC получаем: $\operatorname{tg}\angle A_1CA = AA_1 :$ ______ $=$ $=$ _____ : ____ = ____ . Следовательно, $\angle A_1CA =$ ________

Ответ. ________

77

Основание призмы — равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), а боковое ребро BB_1 образует равные острые углы с ребрами AB и BC. Докажите, что прямые BB_1 и AC взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Докажем, что проекция прямой BB_1 на ____________ ABC перпендикулярна к прямой ____ , тогда по теореме о трех ____________ ______________ получим: BB_1 ___ AC.



1) Проведем перпендикуляр B_1H к плоскости _____ , тогда прямая BH — ______________ прямой BB_1 на плоскость ABC.

2) Пусть $B_1M \perp AB$, $B_1K \perp BC$. Так как по условию задачи $\angle B_1BA =$ $= \angle$ _____ , то $\triangle B_1BM = \triangle$ _____ (по гипотенузе и острому _______), следовательно, BM ___ BK.

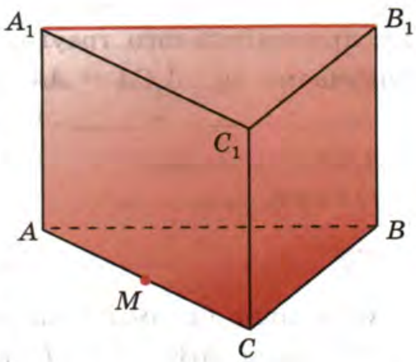
3) $B_1M \perp$ _____ и отрезок B_1H — ____________________ к плоскости ABC, следовательно, $MH \perp AB$ как проекция наклонной ____ на плоскость ABC (по обратной теореме о трех ______________). Аналогично KH ___ BC.

4) $\triangle BMH$ ___ $\triangle BKH$ (по катету и ________________), следовательно, $\angle MBH = \angle$ ______, т. е. отрезок BO — ________________ треугольника ABC.

5) Так как треугольник ABC равнобедренный, AC — его ____________, то биссектриса BO является __________ треугольника, т. е. $BO \perp$ _____, и, следовательно, BB_1 ___ AC, что и требовалось доказать.

78

Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 4 см, а сторона основания — 6 см. Найдите периметр сечения, проходящего через ребро A_1B_1 и точку M — середину ребра AC.



Решение.

1) Основания призмы расположены в ____________________ плоскостях, следовательно, секущая плоскость пересекает плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ по ____________________ прямым. Проведем через точку M прямую m, ____________________ прямой AB. Обозначим точку пересечения прямых m и BC буквой K.

$MK \parallel AB$, AB ___ A_1B_1, следовательно, MK ___ A_1B_1. Проведем отрезки A_1M и ___. Четырехугольник __________ — искомое сечение.

2) Периметр четырехугольника A_1B_1KM равен $A_1B_1 +$ ________ $+ MA_1$, где $A_1B_1 =$ ___ см и $MK =$ ___ см (MK — ____________ линия треугольника ABC). Найдем длины отрезков A_1M и B_1K. По определению правильной призмы ее основание — ________________ треугольник, а боковые ребра ____________________ к плоскости ABC. Следовательно, $AM =$ ___ см и AA_1 ___ ABC.

Из прямоугольного $\triangle A_1AM$ находим: $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + \_\_\_\_} =$

$= \sqrt{\_\_\_\_ + 3^2} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ___ (см).

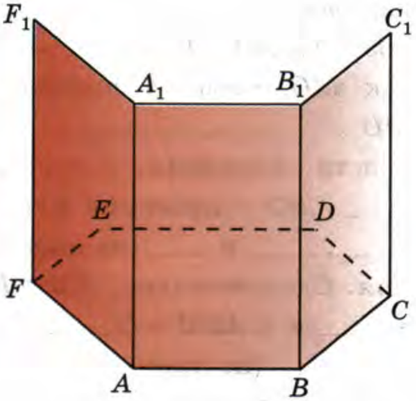
Аналогично из прямоугольного ________________________ BB_1K получаем: $B_1K =$ ___ см.

Итак, $A_1B_1 +$ __________ $+ MA_1 = 6 +$ ________ $=$ _____ (см).

Ответ. Периметр сечения равен ____ см.

79

Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 4 см (достройте рисунок). Найдите площади ее боковой и полной поверхностей.



Решение.

1) Любая правильная призма является __________ призмой, следовательно, площадь ее боковой поверхности равна ____________________ периметра ____________ на ________ призмы, т. е. $S_{бок} = P \cdot$ ____, где $P =$ ____ $\cdot\, 6 =$ _____ (см), $h =$ ____ см.

Таким образом, $S_{бок} =$ _____ $\cdot$ ____ $=$ $=$ _____ (см^2).

2) Площадь полной ______________ любой призмы равна ________ площадей ______ ее граней, т. е. $S_{полн} =$ ______ $+ 2$ ______ . Основание данной призмы — ________________ шестиугольник со стороной $a = 4$ см, следовательно, $S_{осн} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ____ $=$ _____ $\cdot\, 4^2 =$ _____ (см^2).

Итак, $S_{полн} =$ (_____ + ______) см^2.

Ответ. $S_{бок} =$ _______ , $S_{полн} =$ ______________

§ 2 Пирамида

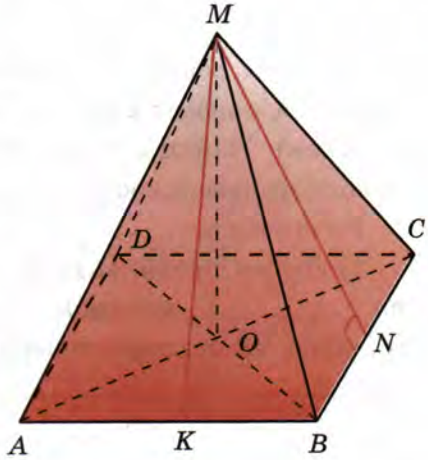
80

Основание пирамиды — прямоугольник $ABCD$, $AB = 18$ м, $BC = 10$ м, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.

1) Площадь полной поверхности пирамиды вычисляется по формуле $S_{полн} =$ __________ + __________ . Так как основание пирамиды — ______________________________ со сторонами 10 м и _________ , то $S_{осн} =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ ______ (м^2).

2) Чтобы найти площадь боковой ____________________ пирамиды, вычислим площади ее ______________ граней.



В прямоугольнике $ABCD$ AC ___ BD, диагонали ____________________ в точке O, поэтому $AO = BO =$ _____ $=$ _____ . Отрезок MO — высота пирамиды, значит, MO — ____________________________ к плоскости основания, и отрезки AO, BO, _____ , DO — проекции наклонных AM, _____ , _____ и _____ на плоскость основания. Следовательно, $AM = BM =$ _____ $=$ $=$ _____ и $\triangle ABM = \triangle$ _______ , а $\triangle BCM =$ $=$ _______ (по трем ___________________), поэтому S_{ABM} ___ S_{CDM} и S_{BCM} ___ S_{ADM}.

3) Пусть $MK \perp AB$, тогда OK ___ AB (обратная теорема о _________ перпендикулярах) и $OK =$ _____ $BC = 0{,}5 \cdot$ _____ $=$ ___ (м). Аналогично если $MN \perp BC$, то $ON =$ _____ $AB = 0{,}5 \cdot$ _____ $=$ ___ (м).

Поскольку $MO \perp ABC$, то MO ___ OK, а значит, $MK = \sqrt{MO^2 + \_\_\_\_\_} =$

$= \sqrt{\_\_ + 5^2} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ _____ (м).

Аналогично $MN = \sqrt{\_\_\_\_\_ + ON^2} = \sqrt{12^2 + \_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ _____ (м).

Итак, $S_{ABM} = 0{,}5AB \cdot$ _____ $=$ _____ $\cdot\, 18 \cdot$ _____ $=$ ______ (м²), $S_{BCM} =$ $=$ ____ . Отсюда получаем:

$S_{бок} = 2(S_{ABM} +$ _________ $) =$ ___ $\cdot$ (_________ $+$ _______) $=$ _________ (м²),

$S_{полн} =$ _________ $+$ _________ $=$ _________ (м²).

Ответ. ___________________________

81

Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Докажите, что:

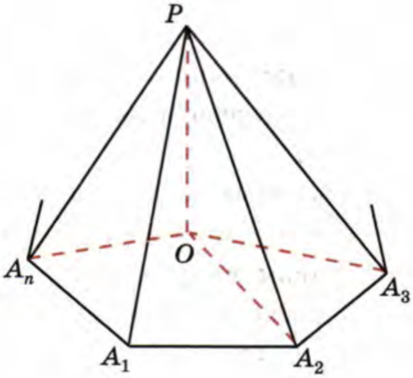
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания;

б) все боковые ребра составляют равные углы с плоскостью основания.

Доказательство.

а) Пусть основание пирамиды — многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$, отрезок PO — высота пирамиды. Тогда отрезки OA_1, _____ , ..., OA_n — проекции боковых _________ PA_1, PA_2, ..., _____ на плоскость основания. Так как

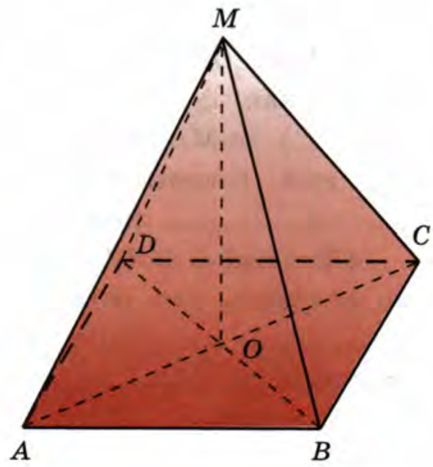
$PA_1 = PA_2 = \ldots =$ __________, то OA_1 ___ ___ OA_2 ___ ... ___ OA_n. Следовательно, точка O равноудалена от __________ многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, поэтому она является ________________ окружности, ____________________ около основания пирамиды.



б) $\triangle A_1PO = \triangle$ ______ $= \ldots = \triangle A_nPO$ (по гипотенузе и __________), следовательно, $\angle PA_1O = \angle$ ______ $= \ldots = \angle PA_nO$, что и требовалось доказать.

82

Основание пирамиды — параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см, высота пирамиды равна 12 см, а все боковые ребра равны между собой. Найдите длину бокового ребра.



Решение.

1) Пусть отрезок MO — высота ______________. Так как $MA = MB =$ $=$ _____ $=$ _____, то $OA =$ _____ $=$ _____ $=$ $=$ _____, поэтому точка O — центр ________________, ________________ около параллелограмма $ABCD$. Но тогда параллелограмм является ____________ ________________, диагонали которого пересекаются в точке ___ и равны друг другу.

2) По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + \_\_\_\_\_} = \sqrt{6^2 + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_} =$ $=$ _____ (см), следовательно, $OA =$ _____ см.

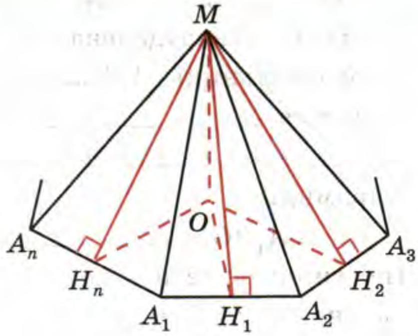
3) $MO \perp ABC$, поэтому MO ___ OA. В треугольнике AMO

$MA = \sqrt{OA^2 + \_\_\_\_\_} = \sqrt{5^2 + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_} =$ _____ (см).

Ответ. ________

83

Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Докажите, что:



а) высоты всех боковых граней, проведенные к сторонам основания пирамиды, равны между собой;

б) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.

Доказательство.

а) Пусть отрезок MO — высота пирамиды $MA_1A_2A_3 \dots A_n$, $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$. Тогда MH_1 ___ A_1A_2, MH_2 ___ A_2A_3 (по теореме о трех ______________________________). Отсюда следует, что углы MH_1O и MH_2O __________ как линейные ________ равных ________________ углов MA_1A_2O и MA_2A_3O.

Так как $\triangle MH_1O$ ___ $\triangle MH_2O$ (по катету и противолежащему ________), то MH_1 ___ MH_2. Аналогично можно доказать равенство высот всех боковых граней пирамиды, проведенных к сторонам ________________ пирамиды.

б) Так как $\triangle MH_1O = \triangle$ ________, то OH_1 ___ OH_2. Аналогично можно доказать, что равны расстояния от точки ___ до всех сторон ________________ пирамиды. Следовательно, точка O — ______________ окружности, ________________ в основание пирамиды, что и требовалось доказать.

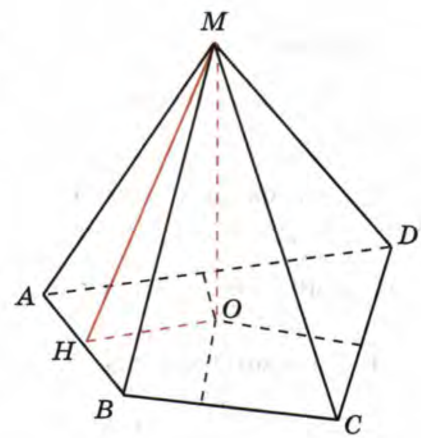
84

Все двугранные углы при основании четырехугольной пирамиды равны между собой. Высота пирамиды равна 12 м, а периметр и площадь основания равны 48 м и 120 м^2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) По условию задачи все двугранные углы при ______________ пирамиды равны, следовательно, ее высота MO проходит через __________ окружности, __________________ в основание, а все высоты боковых __________, проведенные к сторонам основания, __________ между собой. Поэтому если h — высота боковой грани, проведенная из вершины M, то

$S_{бок} = \frac{1}{2} AB \cdot h + \frac{1}{2} \underline{\qquad} \cdot h + \underline{\qquad\qquad\qquad} +$
$+ \underline{\qquad\qquad\qquad} = \frac{1}{2}(AB + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})h =$
$= \underline{\qquad} P_{осн} \cdot \underline{\qquad}$



2)Пусть $MH \perp AB$, тогда OH ____ AB (по теореме о ______________ перпендикулярах), а значит, OH — радиус ________________, вписанной в четырехугольник ________

3) Площадь S многоугольника, его периметр P и радиус r вписанной в многоугольник окружности связаны формулой $S = \frac{1}{2} \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$, следовательно, $r = 2 \underline{\qquad\qquad} : \underline{\qquad} = 2 \cdot 120 : \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$ см.

4) В прямоугольном треугольнике MOH $MH = h = \sqrt{OH^2 + \underline{\qquad}} = \sqrt{\underline{\qquad} + 12^2} = \underline{\qquad}$ (м). Следовательно, $S_{бок} = \frac{1}{2} \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$ (м^2).

Ответ. ______________________________

85

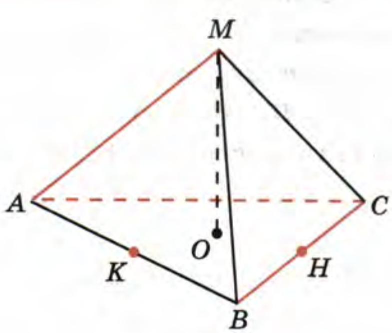
Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 м, а боковое ребро — 4 м. Найдите:

а) площадь боковой поверхности пирамиды;

б) высоту пирамиды;

в) площадь сечения, проходящего через боковое ребро и высоту пирамиды;

г) площадь сечения, проходящего через сторону основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру.



Решение.

а) Площадь боковой поверхности правильной ________________ равна ________________ произведения периметра ________________ на ________________

Апофемой правильной пирамиды называется ______________ боковой грани, проведенная из ________________ пирамиды. Все боковые ребра правильной пирамиды ______________ друг другу, поэтому высота MH треугольника ______ является и ее ________________, т. е. $BH =$ _____

В прямоугольном треугольнике MHC $MH = \sqrt{MC^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - 3^2} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (м). Поэтому $S_{бок} = \_\_\_\_ P_{осн} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_ \cdot BC \cdot \_\_\_\_ = = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (м^2).

б) Проведем высоту MO пирамиды. Так как пирамида ____________, то точка O — ________ основания, и, следовательно, $OH = \_\_\_\_ AH = \frac{1}{3} BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_\_} = \frac{6\sqrt{3}}{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (м).

В прямоугольном треугольнике MOH $MO = \sqrt{MH^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (м).

в) Пусть плоскость сечения проходит через ________ ребро MA и высоту пирамиды. Тогда она пересекает плоскость основания по прямой ____, а ребро BC — в его середине — точке ____. Следовательно, пересечением плоскости AMH и грани BMC служит отрезок ____. Поскольку $MO \perp ABC$, то MO ____ AH (____________ прямой, перпендикулярной к плоскости).

Итак, $S_{AMH} = \frac{1}{2} AH \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot 3\sqrt{3} \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (м^2).

г) Пусть искомое сечение содержит ребро AB и перпендикулярно к боковому ________ MC. Тогда прямая MC перпендикулярна к линии пересечения секущей __________ и грани BMC. Итак, проведем высоту BT треугольника BMC и соединим точки T и A отрезком (выполните построения). Так как AC ____ BC и $\angle ACM$ ____ $\angle BCM$ (пирамида ____________), то $\triangle ACT = \triangle$ ______ (по ________ сторонам и __________ между ними). Следовательно, $\angle ATC = \angle$ ______ $= 90°$.

Итак, MC ____ BT и MC ____ AT, поэтому плоскость ABT ________________ к ребру MC, т. е. треугольник ______ — искомое сечение пирамиды. Из равенства $\triangle ACT$ = __________ следует, что AT ____ BT, а потому медиана TK треугольника ABT является и ____________, т. е. $TK \perp$ ____. Следовательно, $S_{ACT} = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_ \cdot TK$.

В прямоугольном треугольнике BKT $BK = \_\_\_\_ AB = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (м), $KT = \sqrt{BT^2 - \_\_\_\_}$. Найдем длину отрезка BT. Так как $S_{BMC} = = \frac{1}{2} BC \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_ MC \cdot \_\_\_\_$, то $BC \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot BT$, откуда получаем $BT = \frac{BC \cdot MH}{\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_ \cdot \sqrt{7}}{4} = \_\_\_\_ \sqrt{7}$ (м).

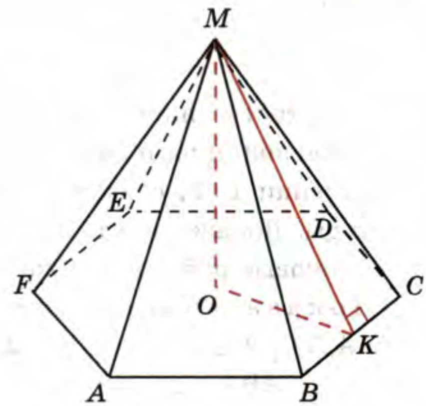
Поэтому $KT = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \_\_\_\_} = \frac{\sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_}}{2} = \frac{\sqrt{\_\_\_\_}}{\_\_\_\_} = \frac{3}{2}\sqrt{\_\_\_}$ (м).

Следовательно, $S_{ABT} = \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = \_\_\_\_$ (м^2).

Ответ. а) $S_{бок} =$ ________ ; б) $MO =$ _______ ; в) $S_{AMH} =$ ________ ; г) $S_{ABT} =$ ________________

86

Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 5 см, а сторона основания — 6 см. Найдите площади ее боковой и полной поверхностей.



Решение.

1) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению ________________________ основания на ______________________, т. е. $S_{бок} = \_\_\_ \cdot q$, где $q = MK = \sqrt{\_\_\_\_ - CK^2}$, $CK = \frac{1}{2}\_\_\_\_\_ =$ $= \_\_\_$ (см).

Итак, $q = \sqrt{\_\_\_\_ - 3^2} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_$ (см), $P = 6 \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_$ (см), $S_{бок} = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_$ (см^2).

2) $S_{полн} = \_\_\_\_\_\_\_\_ + S_{осн}$, где $S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_}{2} = \_\_\_\sqrt{3}$ (см^2).

Следовательно, $S_{полн} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$ (см^2).

Ответ. $S_{бок} =$ _________, $S_{полн} =$ _______________ см^2.

87

Все ребра четырехугольной пирамиды равны между собой. Докажите, что пирамида правильная.

Доказательство.

1) Стороны четырехугольника $ABCD$ — основания пирамиды $MABCD$ — ___________ между собой, следовательно, этот четырехугольник является ______________

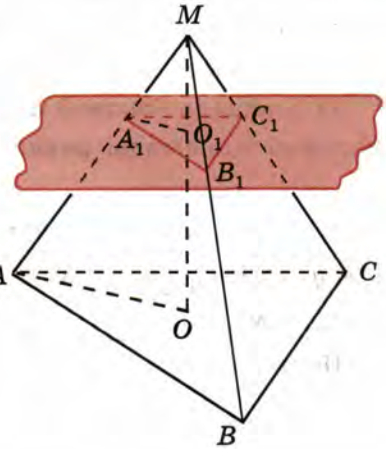
2) Боковые ребра прамиды ___________ между собой, поэтому около ее основания можно описать ____________________. Но ромб, вписанный в окружность, является _______________________, а точка O пересечения диагоналей является его центром.

3) В треугольнике AMC AM ___ MC, AO ___ OC, следовательно, MO ___ AC. Аналогично в треугольнике BMD MO ___ BD. Поэтому отрезок MO — ______________________________ к плоскости основания пирамиды (______________________ перпендикулярности прямой и плоскости).

Итак, основание пирамиды — квадрат, т. е. _________________________ четырехугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с ______________ основания, является высотой пирамиды. В соответствии с определением пирамида ____________________________ , что и требовалось доказать.

88

Плоскость, параллельная основанию треугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды. Докажите, что эта плоскость делит боковые ребра в том же отношении.



Доказательство. Так как плоскости $A_1B_1C_1$ и ___________ параллельны, то A_1B_1 ___ AB (____________________________ параллельных плоскостей). Аналогично

B_1C_1 ___ BC, A_1C_1 ___ AC и A_1O_1 ___ AO.

Поэтому $\dfrac{MA_1}{A_1A} = \dfrac{MO_1}{\underline{\qquad}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{MB_1}{B_1B} = \dfrac{MA_1}{\underline{\qquad}}$; $\dfrac{MC_1}{C_1C} = \dfrac{MA_1}{\underline{\qquad}}$.

Итак, $\dfrac{MA_1}{A_1A} = \dfrac{MB_1}{\underline{\qquad}} = \dfrac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}} = \dfrac{MO_1}{\underline{\qquad}} = \dfrac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

89

Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 10 см и боковым ребром 13 см пересечена плоскостью, параллельной основанию и проходящей через середину высоты пирамиды.

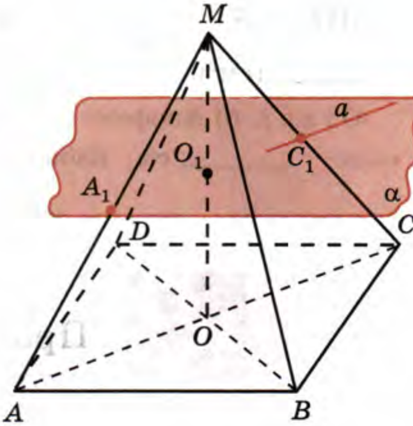
а) Постройте сечение пирамиды данной плоскостью.

б) Найдите апофему, высоту и площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

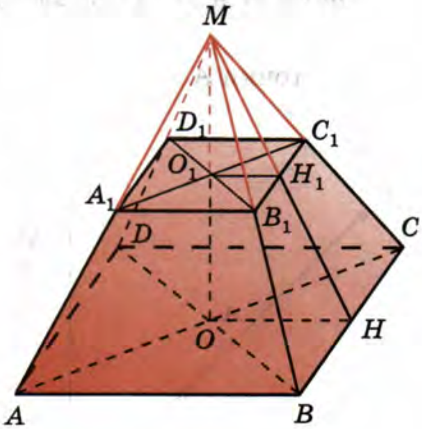
Решение.

а) Пусть точка O_1 — середина высоты MO, плоскость α — секущая. Так как α ___ ABC, то плоскость AMC пересекает плоскости ABC и α по ____________________________ прямым AC и a. Проведем прямую a и обозначим точки ее пересечения с ребрами MC и ____ через C_1 и A_1.

Аналогично плоскость MBD пересекает плоскости ABC и α по ____________ ____________ прямым ______ и B_1D_1 ($B_1 \in MB$, $D_1 \in MD$). Соединим точки A_1, B_1, C_1 и D_1 последовательно отрезками и получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — искомое ____________ пирамиды.



б) Проведем в грани MBC апофему MH пирамиды $MABCD$. Тогда H_1H — ____________ усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Так как плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC ________________________, то $O_1H_1 \parallel$ ________. Но $MO_1 = O_1O$, следовательно, MH_1 ___ H_1H.



В треугольнике MHC катет $MH = \sqrt{MC^2 - ____} = \sqrt{___ - 5^2} = \sqrt{___} = $ _____ (см). Поэтому $H_1H =$ ___ $MH = \frac{1}{2}$ _____ $=$ ___ (см).

В треугольнике MOH $O_1O =$ ___ $MO = \frac{1}{2}\sqrt{MH^2 - \_\_\_\_} = \_\_\_\sqrt{12^2 - \_\_\_} = \_\_\_\sqrt{\_\_\_\_}$ (см).

Площадь боковой ____________________ правильной усеченной ________________ равна произведению ________________ периметров ____________________ на ________________. Периметр основания $ABCD$ равен ___ $BC = 4 \cdot$ _____ $=$ _____ (см).

Найдем периметр основания $A_1B_1C_1D_1$.

Плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC ____________________, следовательно, плоскость MBC пересекает их по ______________________________ прямым, т. е. B_1C_1 ___ BC. Так как MH_1 ___ H_1H, то B_1C_1 — средняя ____________ треугольника MBC, поэтому $B_1C_1 =$ ___ BC. Следовательно, периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен половине ________________________ четырехугольника $ABCD$, т. е. $P_1 = \frac{1}{2}P$ или $P_1 =$ _____ $\cdot 40 =$ _____ (см).

Итак, $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + \underline{\qquad}) \cdot H_1H = \frac{1}{2}(\underline{\qquad\quad} + \underline{\qquad\quad}) \cdot \underline{\qquad} = \frac{1}{2}\underline{\qquad\quad} \cdot \underline{\qquad} =$
$= \underline{\qquad\quad}$ (см^2).

Ответ. б) Апофема ____________________ пирамиды равна ___ см, высота — ________ см, площадь _____________ поверхности — _______ (см^2).

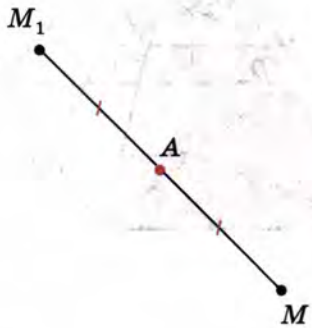
§ 3 Правильные многогранники

90

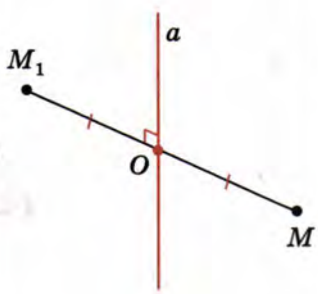
Заполните пропуски.

Точки M и M_1 называются симметричными относительно:

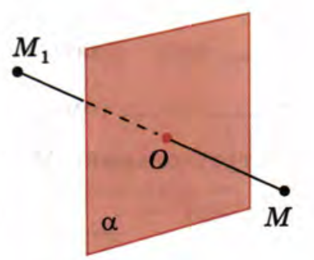
точки A



____________________ a



____________________ α



если:

точка A — __________ отрезка MM_1.

Точка A считается ____________________ самой себе.

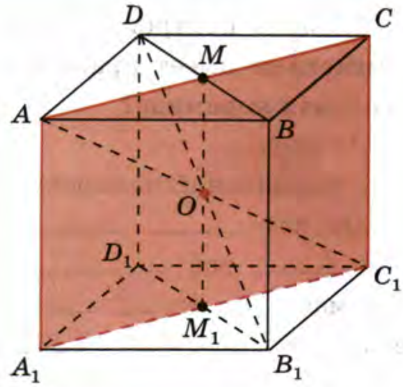
прямая a проходит через __________ отрезка MM_1 и __________ ____________________ к нему.

__________ точка прямой a считается ____________________ самой себе.

____________________ α проходит через __________ __________ отрезка MM_1 и __________ ____________________

Каждая __________ __________ α считается ____________________ ____________________

91



Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите вершину, симметричную вершине D относительно:

а) точки O;

б) прямой AC;

в) плоскости ACC_1.

Решение.

а) Точка O является ____________ отрезка DB_1, следовательно, вершины D и ______ симметричны относительно ____________ O.

б) Диагонали квадрата $ABCD$ взаимно ____________________ и делятся точкой пересечения ____________. Следовательно, прямая AC проходит через середину отрезка BD и ____________________ к нему, т. е. точки D и B ____________________ относительно ____________ AC.

в) Так как $AA_1 \perp ABD$, то AA_1 ___ BD (определение прямой, ____________________ к плоскости). Кроме того, BD ___ AC. Таким образом, прямая BD перпендикулярна к двум ____________________ прямым (AA_1 и AC) плоскости ________, поэтому BD ___ ACC_1 (признак перпендикулярности ____________ и плоскости). Прямая AC пересекает отрезок BD в его ____________. Следовательно, плоскость ACC_1 проходит через ____________ отрезка BD и перпендикулярна к нему, поэтому точки B и D ____________________ относительно плоскости ACC_1.

Ответ. а) Вершина ______; б) вершина ______; в) вершина ______

92

Заполните пропуски:

а) Точка называется ____________ симметрии фигуры, если ____________ точка фигуры ____________________ относительно нее некоторой точке той же ____________

б) Прямая называется осью ____________________ фигуры, если каждая точка фигуры симметрична ____________________ нее некоторой ____________ той же фигуры.

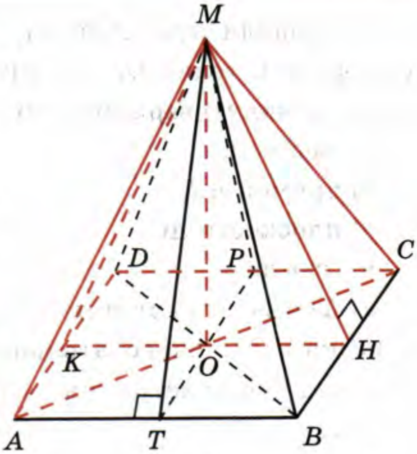
в) Плоскость называется ____________ симметрии фигуры, если

____

относительно нее ____________________________________ фигуры.

93

Сколько центров, осей и плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная пирамида?



Ответ.

У правильной четырехугольной пирамиды нет ______ симметрии; ______ ось ______ (прямая ____); ______ плоскости симметрии (KMH, ______, AMC и ______).

94

Заполните пропуски в определении правильного многогранника:

Выпуклый ______ называется правильным, если ______ его грани — ______ многоугольники, и в ______ его ______ сходится одно и то же число ______

95

Докажите, что куб является правильным многогранником.

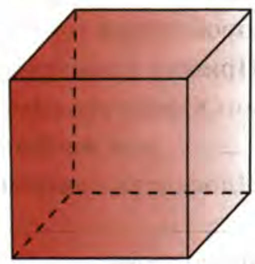
Доказательство.

Проверим, обладает ли куб всеми признаками правильного ______, указанными в определении.

1) Куб ______ выпуклым многогранником.

2) Каждая грань куба — ______, т. е. ______ многоугольник, и все грани ______ между собой.

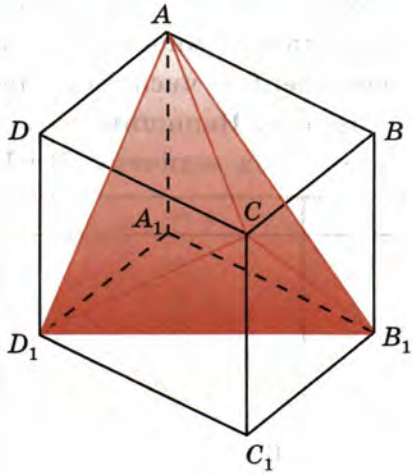
3) В ______ вершине куба сходится ______ число ребер, а именно ___ ребра.



Итак, у куба ______ все признаки, указанные в определении ______ многогранника. Следовательно, куб ______ правильным ______, что и требовалось доказать.

96

Вершины A, C, B_1 и D_1 куба соединены попарно отрезками. Докажите, что многогранник ACB_1D_1 является правильным.



Доказательство.

1) Получившийся многогранник ACB_1D_1 — тетраэдр, а известно, что тетраэдр ______ выпуклым многогранником.

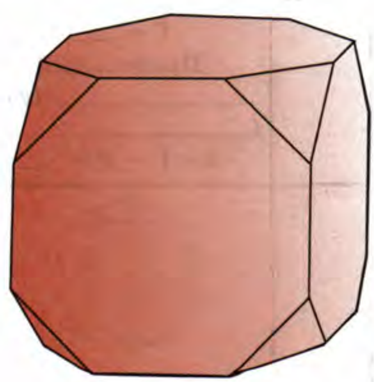
2) Все ребра многогранника ACB_1D_1 являются ______ граней куба, следовательно, они ______ между собой, а потому все грани многогранника ACB_1D_1 являются правильными ______

3) В каждой вершине ______ ACB_1D_1 сходится ______ количество ______, а именно ___ ребра.

Итак, у тетраэдра ACB_1D_1 ______ все признаки правильного многогранника, следовательно, этот тетраэдр — ______ многогранник.

97

От куба отсечены 8 тетраэдров так, что все грани получившегося многогранника — правильные многоугольники. Является ли этот многогранник правильным?



Решение. Проверим наличие признаков, указанных в определении правильного ______

1) Данный многогранник ______ ______ выпуклым.

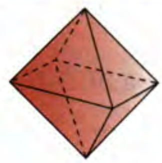
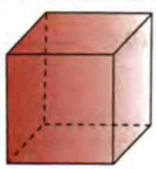
2) В каждой вершине сходится ______ число ребер (___ ребра).

3) Все грани — правильные ______, но не все они равны друг другу: треугольник ______ восьмиугольнику.

Следовательно, данный многогранник ______ правильным.

98

Запишите в таблицу значения параметров: n — число сторон грани правильного многогранника; k — число ребер, сходящихся в одной вершине; В — число вершин многогранника; Р — число ребер; Г — число граней. Напишите названия многогранников. Вычислите для каждого из них величину В + Г − Р.

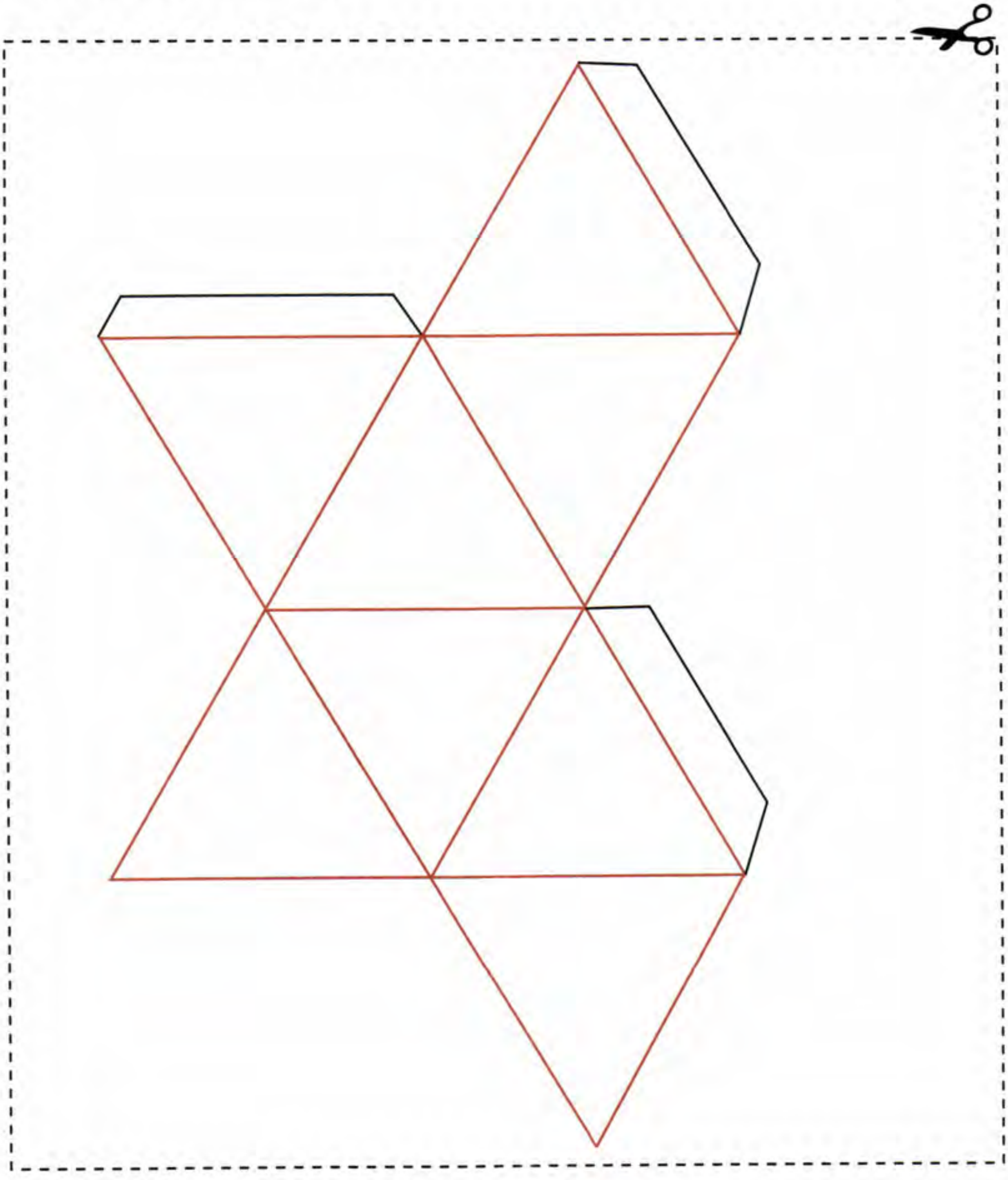
	k = ___	k = ___	k = ___
n = ___	 В = ___, Р = ___, Г = ___ Правильный тетраэдр (четырехгранник) В + Г − Р = ___	 В = ___, Р = ___, Г = ___ Правильный ___ (___) В + Г − Р = ___	 В = ___, Р = ___, Г = ___ ___ ___ (___) В + Г − Р = ___
n = ___	 В = ___, Р = ___, Г = ___ Правильный ___ (куб) (___) В + Г − Р = ___	Такой правильный ___ не существует	Такой правильный ___ ___
n = ___	 В = ___, Р = ___, Г = ___ ___ ___ (___) В + Г − Р = ___	Такой правильный ___ ___	___ ___ ___

99

а) Дорисуйте на развертке правильного октаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного октаэдра.

Ответ. б) ________ см².

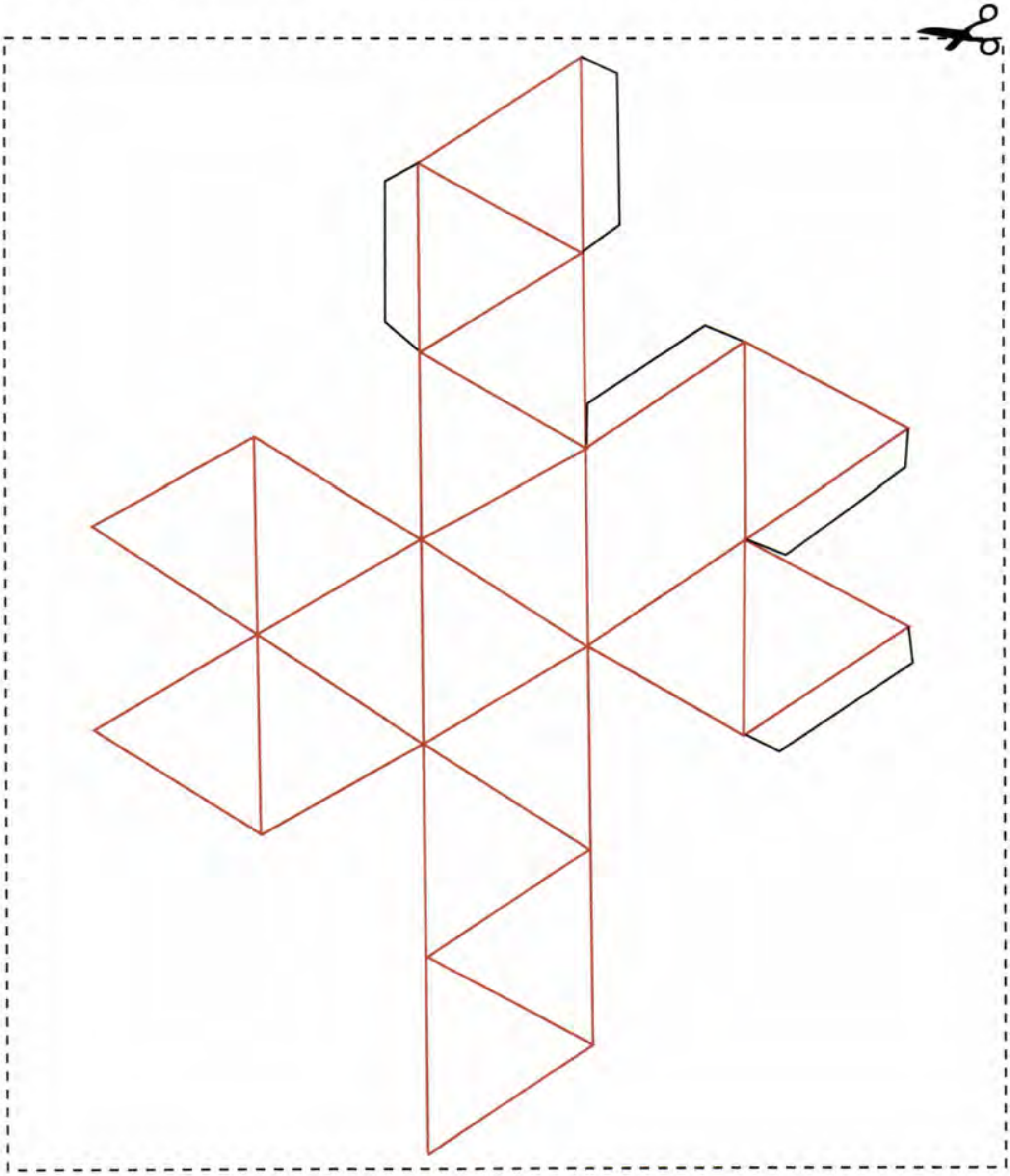


100

а) Дорисуйте на развертке правильного икосаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного икосаэдра.

Ответ. б) ______ см².

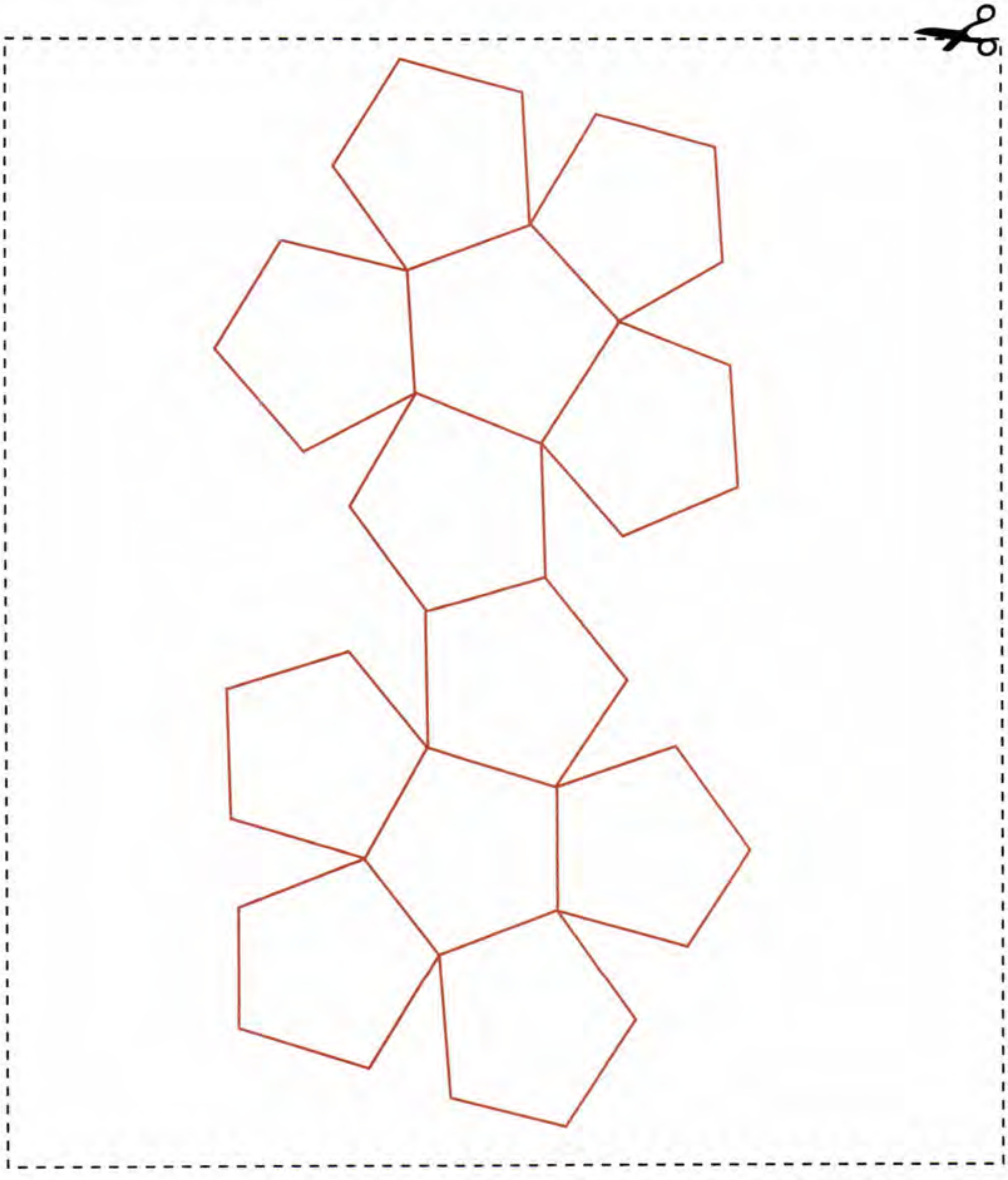


101

а) Дорисуйте на развертке правильного додекаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного додекаэдра.

Ответ. б) _______ см².

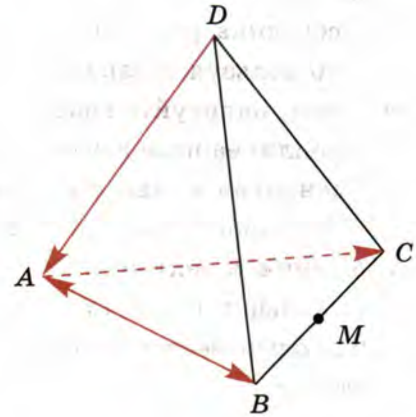


Глава IV

Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

102



Точка M — середина ребра BC правильного тетраэдра $DABC$.

а) Началом каких ненулевых векторов, изображенных на рисунке, служит точка A?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A?

в) Как называется и обозначается вектор с концом и началом в точке C?

г) Нарисуйте цветным карандашом векторы $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$.

д) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$, если $|\overrightarrow{DA}| = 2$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AB}$, ____; б) ____________; в) вектор с началом и ____________ в точке C называется ____________ и обозначается _____ или ___; д) $|\overrightarrow{AB}|$ = ___, |_____| = _____, ______________________________

103

Заполните пропуски:

а) Два ненулевых ____________ называются коллинеарными, если они лежат на одной ____________ или на ____________________ прямых (обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$).

б) Два ненулевых ____________ $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{KM}$ называются сонаправленными, если они ______________ и лучи BC и _____ сонаправлены (обозначение: $\overrightarrow{BC}$ ___ $\overrightarrow{KM}$).

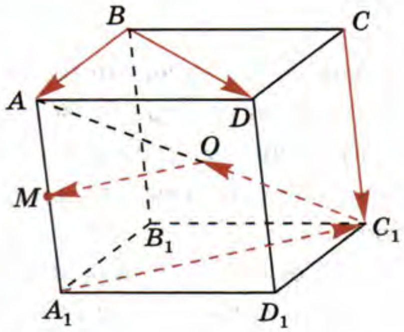
в) Два ненулевых вектора $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{PT}$ называются противоположно ________________________, если они ________________ и лучи CE и PT ________________________________ направлены (обозначение: $\overrightarrow{CE}$ ___ $\overrightarrow{PT}$).

г) Нулевой вектор считается сонаправленным с ________ вектором.

д) Векторы называются равными, если они ________ и их длины ________, т. е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, если $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}|$ ________

104

Точка O — середина диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра AA_1.



1) Используя обозначенные на рисунке точки, нарисуйте векторы:

а) коллинеарные вектору $\overrightarrow{BD}$;

б) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BA}$;

в) противоположно направленные по отношению к вектору $\overrightarrow{OM}$;

г) равные вектору $\overrightarrow{CC_1}$.

2) Сколько векторов, равных вектору $\overrightarrow{C_1O}$, можно отложить от точки O?

Ответ.

1) а) ____, ____, ____; б) ____, ____, ____; в) ____, ____; г) ____, ____, ____

2) От точки O можно отложить только ________, ________ вектору $\overrightarrow{C_1O}$.

105

Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 3 м, 4 м и 12 м. Найдите длину векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1A}$; в) $\overrightarrow{A_1C}$.

Решение.

а) Длина вектора $\overrightarrow{AC_1}$ — это длина ________ AC_1. Отрезок AC_1 является ________ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, следовательно, $AC_1 = \sqrt{3^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (см), т. е. $|\overrightarrow{AC_1}| = \_\_\_\_$ см.

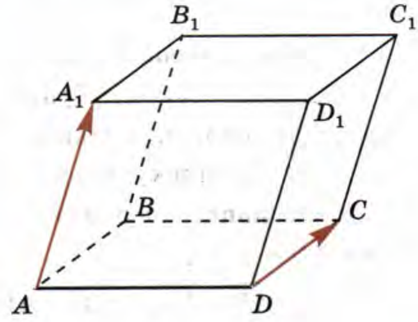
б) Вектор $\overrightarrow{C_1A}$ является ________ вектору $\overrightarrow{AC_1}$, следовательно, их ________ равны, т. е. $|\overrightarrow{C_1A}| = |\_\_\_\_| = \_\_\_\_$ (см).

в) Длина вектора $\overrightarrow{A_1C}$ равна ________ диагонали A_1C. Диагонали прямоугольного ________ равны, значит, $|\overrightarrow{A_1C}| = \_\_\_\_$ см.

Ответ. а) $|\overrightarrow{AC_1}| = \_\_\_\_$ см; б) $|\overrightarrow{C_1A}| = \_\_\_\_$ см; в) $|\overrightarrow{A_1C}| = \_\_\_\_$ см.

§ 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

106



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

2) Сравните суммы векторов $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA_1}$.

Решение.

1) Для построения суммы ________ используем правило треугольника.

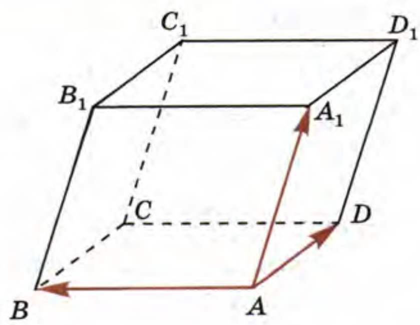
а) От конца вектора $\overrightarrow{AA_1}$ — точки ____ — отложим вектор _____ , равный вектору $\overrightarrow{DC}$. Суммой векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ является вектор _____ (изобразите его на рисунке). Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AA_1} +$ _____ $=$ _____

б) Откладывая от конца вектора $\overrightarrow{DC}$ вектор _____ , равный вектору _____ , получаем: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DC}+$ _____ $=$ _____ (изобразите этот вектор на рисунке).

2) Начала и концы полученных векторов _______ и _______ служат вершинами четырехугольника ADC_1B_1, который является ______________________________ . Следовательно, $AB_1 =$ _____ и лучи AB_1 и _____ сонаправлены, а значит, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} =$ _____ $+ \overrightarrow{AA_1}$.

107



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$.

Решение.

Первый способ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB}+$ _____$) + \overrightarrow{AD}$ (________________ закон). Так как грань ABB_1A_1 является ______________________ , то по правилу параллелограмма получаем:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=$ ______ . Четырехугольник AB_1C_1D — ______________________
______________, следовательно, по правилу ______________________
$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD}=$ ______

Итак, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=($ ______ $+\overrightarrow{AA_1})+$ ______ $=$ ______ $+\overrightarrow{AD}=$ ______

Второй способ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AA_1}+$ ______$)$ (______________
______________ закон). Грань AA_1D_1D — ______________________ ,
следовательно, по правилу ______________________ $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=$
$=$ ______ . Четырехугольник AD_1C_1B — ______________________ ,
следовательно, по правилу ______________________
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=$ ______

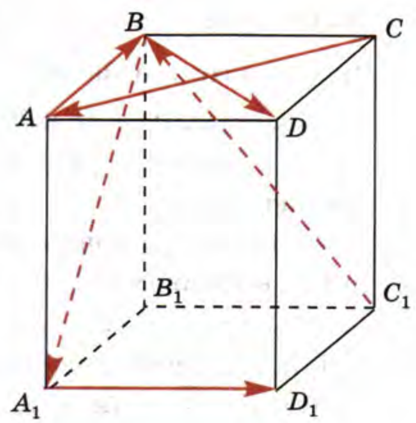
Итак, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+$ ______$)+$ ______ $=\overrightarrow{AB}+($ ______ $+\overrightarrow{AD})=$ ______

Ответ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=$ ______

108

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{C_1B}.$$

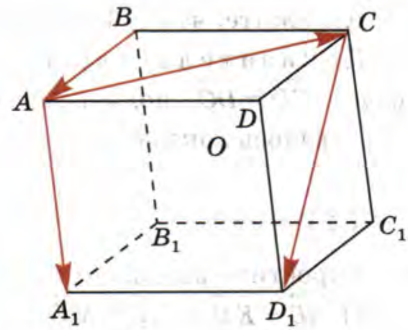


Доказательство.	Обоснование.
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=$	______________ закон
$=(\overrightarrow{AB}+$ ____$)+\overrightarrow{BD}=$	______________ закон
$=(\overrightarrow{CA}+$ ____$)+\overrightarrow{BD}=$	______ треугольника
$=$ ____ $+\overrightarrow{BD}=$	правило ______________
$=$ ____	
2) $\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{C_1B}=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+(\overrightarrow{BA_1}+$ ____$)=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+(\overrightarrow{C_1B}+$ ____$)=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+$ ____ $=$	______ треугольника
$=$ ____ $+\overrightarrow{A_1D_1}=$	правило ______________
$=$ ____	

Грань CDD_1C_1 параллелепипеда является ______________________
______________________, следовательно, $\overrightarrow{CD}$ ____ $\overrightarrow{C_1D_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+$
$+$ ______ $=\overrightarrow{A_1D_1}+$ ______ $+\overrightarrow{C_1B}$, что и требовалось доказать.

109

Какие векторы с концом и началом в вершинах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$:



а) противоположны вектору $\overrightarrow{AC}$;

б) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1}$;

в) равны разности $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$;

г) равны сумме $\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{CD_1})$;

д) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{AC}$?

Решение.

а) Два ненулевых ____________ называются противоположными, если их длины __________ и они ______________________ направлены. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC =$ ______. Противоположно направлены по отношению к лучу AC лучи ____ и _____

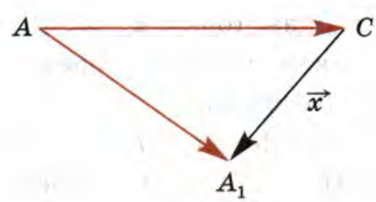
Следовательно, вектору $\overrightarrow{AC}$ противоположны векторы _____ и _____

б) Запись $-\overrightarrow{CD_1}$ означает вектор, _______________________________ вектору $\overrightarrow{CD_1}$. Равными этому вектору являются векторы _____ и _____

в) Разность векторов $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$ можно найти двумя способами:

1) по определению разности двух ____________

2) используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+($____$)$.



1) По определению разностью векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ является такой ____________ $\vec{x}$, сумма которого с вектором _____ равна вектору _____, т. е. $\overrightarrow{AC}+$ ____ $=$ _____. Значит, искомый вектор $\vec{x}$ — это вектор _____, т. е. $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ _____

2) Используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+($_______$)$, получаем: $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=\overrightarrow{AA_1}+(-$ _____$)$. Но вектор $-\overrightarrow{AC}$ — это вектор, ______________________________ вектору _____, т. е. вектор _____. Поэтому $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=\overrightarrow{AA_1}+$ _____ $=\overrightarrow{CA}+$ _____ $=$ _____

г) Как установлено в п. «б», $-\overrightarrow{CD_1}=$ _____ и также $-\overrightarrow{CD_1}=$ _____. Следовательно, $\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{CD_1})=\overrightarrow{BA}+$ _____ $=$ _____ (по ________________ треугольника). Этому вектору равны векторы $\overrightarrow{B_1B}$, _____ и _____

д) Используя результаты п. «а» и «б», получаем: $-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=$ ____ $+(-$ ____$)=$ ____ $+$ ____ $=$ ____. Этот вектор равен вектору _____

Ответ. а) _____, _____; б) _____, _____; в) _____; г) _____, _____, _____, _____; д) _____, _____

110

Докажите, что $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

Доказательство. Используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=$ ___ $+(-\vec{b})$ и равенство $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$, получаем: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(-$ _____ $)=\overrightarrow{AB}+$ _____ , что и требовалось доказать.

111

Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OK}$;

б) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KB}+$ _____ $-\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{MC}+$ _____ $-\overrightarrow{OK}=$ _____ $+$
$+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}+(-$ _____ $)=\overrightarrow{AK}+$ _____ $+$ _____ $=\overrightarrow{AK}+$ _____ $+\overrightarrow{OC}=$
$=\overrightarrow{AO}+$ _____ $=$ _____

б) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{PM}-$ _____ $-\overrightarrow{CA}+$ _____ $=$
$=\overrightarrow{KM}+$ _____ $+\overrightarrow{PA}+$ _____ $+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{KP}+$ _____ $+\overrightarrow{CE}=$ _____ $+$ _____ $=$
$=$ _____

Ответ. а) _____ ; б) _____

112

Даны точки K, M, P, O. Представьте вектор $\overrightarrow{KM}$ в виде алгебраической суммы векторов: а) $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{PO}$.

Решение.

а) Используя равенства $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PO}+$ _____ , $\overrightarrow{PO}=-$ _____ , $\overrightarrow{OM}=-$ _____ , получаем: $\overrightarrow{KM}=$ _____ $-$ _____ $-$ _____

б) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KO}+$ _____ $+$ _____ $=-$ _____ $-$ _____ $+$ _____

Ответ.

а) $\overrightarrow{KM}=$ ______________ ; б) $\overrightarrow{KM}=$ ______________

113

Заполните пропуски:

Произведением ___________ вектора $\vec{a}$ на ________ k называется ___________ $\vec{b}$, такой, что $|\vec{b}|=|$___$|\cdot|$___$|$, причем $\vec{b}\uparrow\uparrow$___ при $k\geqslant 0$ и $\vec{b}$ ___ $\vec{a}$ при $k<0$.

Произведением нулевого ___________ на ___________ число считается ___________ вектор.

114

Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства:

а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые ______________, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на ______________ $|1 \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_\_| = |\_\_\_|$, а так как $1 > 0$, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ ____. Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a}$ ____ $\vec{a}$.

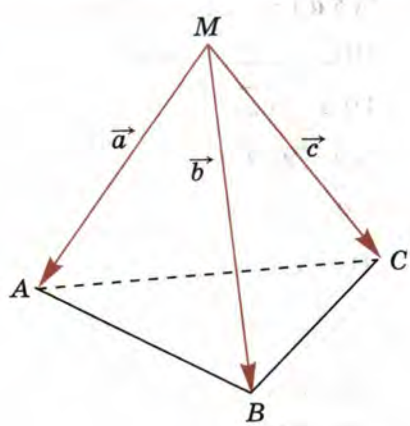
б) По определению ___________________________ вектора на число $|(-1) \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_\_| = \_\_\_ \cdot |\_\_\_| = |\vec{a}|$, а так как -1 ____ 0, то $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Следовательно, векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и ____ противоположны, т. е. $(-1) \cdot \vec{a}$ ____ $-\vec{a}$.

115

Дана треугольная пирамида $MABC$, $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$.

а) Отложите от точки M вектор: $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

б) Отложите от точки A вектор $\vec{n} = -\frac{2}{3}\vec{m}$.



Решение.

а) Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то по определению произведения вектора на __________ $\vec{x} \uparrow\uparrow$ ____ и $|\vec{x}| =$ ____ $|\vec{b}|$. Отметим середину ребра MB — точку E, тогда $\overrightarrow{ME} =$ ____ $\vec{b} = \vec{x}$. Аналогично отметим точку H — ________________ ребра MC, тогда $\overrightarrow{MH} =$ ____ $\vec{c} =$ _______

Так как $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}$ ____, то $\vec{z} = \overrightarrow{ME} +$ ____. Построим вектор $\vec{z}$ по __________________ параллелограмма. Для этого через точку E проведем __________________, параллельную прямой MC, а через точку H — прямую,

____________________ прямой _____. По теореме _________ эти прямые пересекут отрезок BC в его __________. Обозначим эту точку буквой K. Тогда $\vec{z}$ = _____

$\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}$____ $= \vec{a} - (\frac{1}{2}\vec{b}$ ____ $\frac{1}{2}\vec{c})$ — первый ____________________________ закон. Но $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}$____ $= \vec{z} = \overrightarrow{MK}$, $\vec{a}$ = _____, следовательно, $\vec{m}$ = _____ − _____, т. е. $\overrightarrow{MA}$ = _____ + $\vec{m}$. Поэтому $\vec{m}$ = _____

б) Так как $\vec{n} = -\frac{2}{3}$____ и $-\frac{2}{3}$ ____ 0, то $\vec{n}$ ____ $\vec{m}$ и $|\vec{n}|$ = ____ $|\vec{m}|$. Отложим от точки A вектор $\vec{n}$. Для этого на отрезке AK нужно отметить точку O так, чтобы AO = ____ AK. Тогда $\overrightarrow{AO}$ = ____ $\overrightarrow{AK}$ = ____ $\vec{m} = \vec{n}$.

116

Упростите выражение $2(5\vec{a} - 3\vec{c}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{c})$.

Решение.	Обоснование.
$2(5\vec{a}$ − _____) − 3(_________) =	__________ распределительный закон
= $2(5\vec{a})$ − _____ − $3(3\vec{a})$_____ =	____________________ закон
= $10\vec{a}$ − _____ − $9\vec{a}$ ________ =	________________________ и переместительный законы сложения
= $10\vec{a} - 9\vec{a}$ − ___________ =	
= $(10 - 9)\vec{a}$ − ___________ =	____________________ закон
= $1\vec{a}$ − _____ = _____	
Ответ. _____	

117

Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство. Возможны два случая: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и 2) $\vec{a}$ ____ $\vec{b}$. В обоих случаях векторы лежат на одной прямой или на ____________________ прямых, т. е. лежат в одной плоскости.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмем число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |$____$| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |$____$| = |\vec{b}|$. Так как k ____ 0, то $k\vec{a} \uparrow\uparrow$ ____. Следовательно, $\vec{b}$ ____ $k\vec{a}$.

Итак, для первого случая утверждение доказано.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмем число $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\_\_\_|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\_\_\_| =$ $= \dfrac{|\_\_\_|}{|\vec{a}|} \cdot |\_\_\_| = |\_\_\_|$. Так как $k <$ ___, то $k\vec{a}$ ___ $\vec{a}$, и поэтому $k\vec{a}$ ___ $\vec{b}$.

Итак, $|\vec{b}|$ ___ $|k\vec{a}|$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow$ ___, следовательно, $\vec{b}$ ___ $k\vec{a}$, что и требовалось доказать.

118

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Докажите, что коллинеарны векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство. По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ ________________, причем $\vec{c} \neq$ ___, поэтому найдется число k, такое, что $\vec{a} =$ ___ $\vec{c}$ (см. задание 117). Аналогично найдется число m, такое, что $\vec{b} = m$ ___

Поэтому $\vec{a} - 2\vec{b} = k$ ___ $- 2($___ $\vec{c}) = k\vec{c} - ($_____$)\vec{c} = ($___ $-$ ____$)\vec{c}$, т. е. вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ равен произведению вектора $\vec{c}$ на число _______. Следовательно, по определению ________________ вектора на число эти векторы ____________________, что и требовалось ______________

119

Докажите следующее утверждение:

Если точка M — середина отрезка AB и точка O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

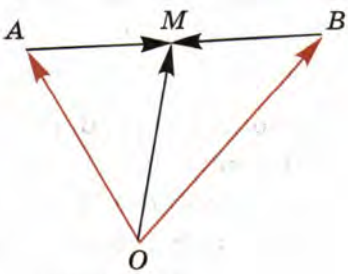
Доказательство. Так как точка M — _____________ отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ ____________________________________, т. е. $\overrightarrow{AM} = -$ _____, и, значит, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ _____

Для точек A, M и произвольной точки O по правилу треугольника получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \_\_\_\_\_, \quad (1)$$

а для точек B, M и O получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \_\_\_\_\_ + \overrightarrow{BM}. \quad (2)$$



Сложим равенства (1) и (2):

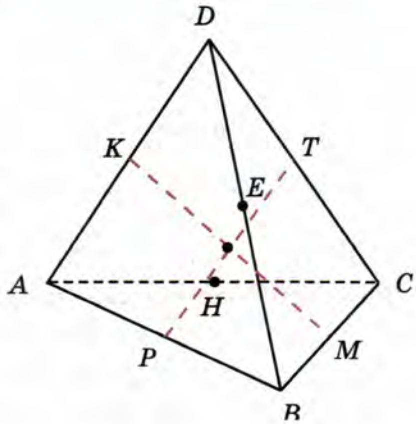
$\overrightarrow{OM} +$ _____ $= \overrightarrow{OA} +$ _____ $+ \overrightarrow{OB} +$ _____ .

Отсюда следует: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} +$ _____ $+$ $+ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ _____ $+ \overrightarrow{OB} + \vec{0}$.

Итак, $2\overrightarrow{OM} =$ _____ $+$ _____, поэтому $\overrightarrow{OM} =$ ___________________________, что и требовалось доказать.

120

Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



Доказательство. Пусть точка K — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$, тогда для любой ____________ X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad}\overrightarrow{XD}$ (см. задание 119). Если точка M — середина ребра BC, то $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\underline{\qquad}+\underline{\qquad}$. Обозначим буквой Q середину отрезка KM, тогда

$$\overrightarrow{XQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{XK}+\frac{1}{2}\underline{\qquad}=\frac{1}{2}(\underline{\qquad}+\overrightarrow{XM})=\frac{1}{2}((\frac{1}{2}\overrightarrow{XA}+\frac{1}{2}\underline{\qquad})+(\underline{\qquad}+\frac{1}{2}\overrightarrow{XC}))=$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\underline{\qquad}+\overrightarrow{XD}).$$

Обозначим буквами P, T и O середины отрезков AB, ______ и PT. Тогда $\overrightarrow{XP}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XT}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XP}+\underline{\qquad})=$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad})+\frac{1}{2}(\underline{\qquad\qquad\qquad}))=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\underline{\qquad}+\underline{\qquad}).$$

Обозначим буквами E, H и F середины отрезков BD, AC и EH. Тогда получим: $\overrightarrow{XE}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XH}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XF}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}=$

$$=\frac{1}{\underline{\quad}}(\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad\qquad\qquad}+\overrightarrow{XD}).$$

Сравнив полученные выражения для векторов $\overrightarrow{XQ}$, $\overrightarrow{XO}$ и $\overrightarrow{XF}$, делаем вывод: $\overrightarrow{XQ}=\underline{\qquad}=\underline{\qquad}$. Так как начала этих равных векторов совпадают, то ______________________ и их концы. Следовательно, середины отрезков KM, PT и ______ совпадают, т. е. эти отрезки ______________________ в одной точке и делятся этой точкой ______________, что и требовалось ______________

121

Дано: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$ $(k\neq-1)$.

Докажите, что:

а) точки A, B и M лежат на одной прямой;

б) для любой точки X пространства верно равенство $\overrightarrow{XM}=\frac{\overrightarrow{XA}+k\overrightarrow{XB}}{1+k}$ (задача 349 учебника).

Доказательство.

а) Так как $\overrightarrow{AM} = k$ _____ , то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ ____________________ (по определению ____________________ вектора на число). Следовательно, прямые AM и MB либо параллельны, либо ____________________ . Поскольку эти прямые имеют общую __________ M, то они ____________________ , следовательно, точки A, B и M лежат на ______________________________

б) Возьмем произвольную точку X пространства и представим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ в виде разности векторов с началом в точке X: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{XM} -$ _____ , $\overrightarrow{MB} =$ _____ $-\overrightarrow{XM}$.

Подставим в исходное равенство полученные выражения: $\overrightarrow{XM} -$ _____ $= k(\overrightarrow{XB} -$ _____$)$, или $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = k\overrightarrow{XB} -$ _______

После переноса слагаемых $\overrightarrow{XA}$ и $k\overrightarrow{XM}$ из одной части равенства в другую получим: $\overrightarrow{XM} +$ _______ $= \overrightarrow{XA} + k$ _____ , или $(1 + k)\overrightarrow{XM} =$ $=$ _____ $+ k\overrightarrow{XB}$. По условию задачи $k \neq -1$, следовательно, $1 + k$ ___ 0. Поэтому обе части ______________ можно умножить на число $\dfrac{1}{1+k}$.

Получим: $\overrightarrow{XM} = \dfrac{\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_\_\_}{1+k}$, что и требовалось доказать.

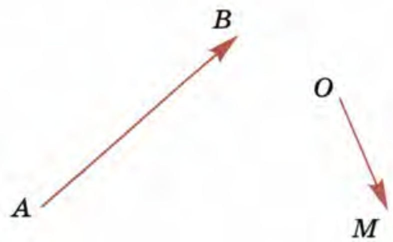
§ 3 Компланарные векторы

122

Докажите, что компланарны:

а) любые два вектора;

б) любые три вектора, два из которых коллинеарны.

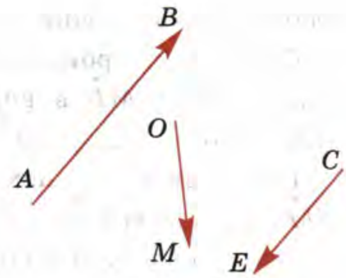


Доказательство.

а) Векторы называются компланарными, если при ____________________ их от одной и той же ____________ они будут лежать в __________ плоскости. Рассмотрим два произвольных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$. От любой точки пространства ____________ отложить вектор, равный данному ______________ . Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$, равный _____________ $\overrightarrow{OM}$

(выполните построение). Через любые три точки проходит ______________, следовательно, векторы $\overrightarrow{AH}$ и ____ лежат в одной ______________, поэтому векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{AB}$ ______________, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{OM}$, два из которых, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$, коллинеарны. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$, равный ______________ $\overrightarrow{OM}$, и вектор $\overrightarrow{AK}$, равный вектору ____ (выполните построение). Так как $AK \parallel AB$, то точка K ______________ на прямой AB. Через прямую AB и точку H проходит ______________. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ ______________ в этой плоскости. Следовательно, данные векторы $\overrightarrow{AB}$, ____ и $\overrightarrow{OM}$ ______________, что и требовалось доказать.



123

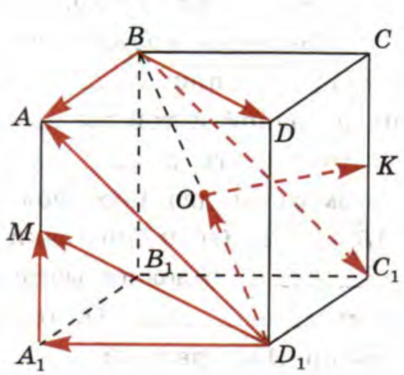
Точка O — середина диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра CC_1, точка M лежит на ребре AA_1. Найдите на рисунке компланарные векторы.

Решение.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от ________ и той же ________ они будут лежать в одной ______________

Можно сказать иначе: векторы называются ______________, если имеются ______________ им векторы, лежащие в ______________ плоскости.

1) В плоскости грани ADD_1A_1 лежат векторы $\overrightarrow{DD_1}$, ____, ____, ____ и ____. Следовательно, эти пять векторов ______________. Прямые BC_1 и ____ параллельны, поэтому если от точки D_1 отложить ______________, равный век-



тору $\overrightarrow{BC_1}$, то он будет лежать в ______________ грани ADD_1A_1. Следовательно, векторы $\overrightarrow{DD_1}$, ______, ______, ______, ______ и $\overrightarrow{BC_1}$ ______________________

2) Векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$ лежат в ______________ $A_1D_1C_1$, векторы $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{BA}$ ______________________, следовательно, векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и ______ компланарны. Прямые BD и B_1D_1 ______________, поэтому если от точки D_1 отложить __________, равный вектору $\overrightarrow{BD}$, то он будет лежать в ______________ $A_1D_1C_1$. Аналогично поскольку OK ____ A_1C_1, то вектор, равный __________ $\overrightarrow{OK}$ и отложенный от точки D_1, будет лежать в плоскости ________. Следовательно, компланарными являются векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, ______ и ______

3) Отрезки BA и D_1C_1 равны и ______________, следовательно, четырехугольник ABC_1D_1 является ______________________, а потому векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{D_1A}$, ______, ______ и ______ лежат в одной ______________ и, следовательно, компланарны.

Ответ. Компланарными являются векторы:

1) $\overrightarrow{DD_1}$, ______, ______, ______, ______ и ______

2) $\overrightarrow{D_1A_1}$, ______, ______, ______ и ______

3) $\overrightarrow{BA}$, ______, ______, ______ и ______

124

Заполните пропуски в формулировке признака компланарности трех векторов:

Если вектор $\vec{c}$ можно ______________ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x$ ____ + ______, где ____ и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, ____ и $\vec{c}$ ______________________

125

Дано: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{d}) - (3\vec{d} - \vec{a} - \vec{b})$. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство.

Упростим данное равенство: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} +$ ____$) - (3\vec{d} -$ ____ $- \vec{b}) = 3\vec{a} -$ $-$ __________ $- 3\vec{d} +$ ________ $= 3\vec{a} + \vec{a} - 3\vec{b} +$ ______________ $= 4\vec{a} -$ ______

Итак, вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и ____, следовательно, векторы $\vec{a}$, ____ и $\vec{c}$ ______________________, что и требовалось доказать.

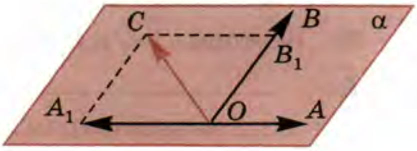
126

Докажите свойство компланарных векторов:

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причем коэффициенты x и y определяются единственным образом.



Доказательство. Отложим от произвольной точки O векторы: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ________________________, то векторы $\overrightarrow{OA}$, _____ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в одной ________________________ (обозначим ее буквой α). Поскольку $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}$ = ____, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и _____ неколлинеарны. В каждой плоскости пространства справедливы все аксиомы и ______________ планиметрии.

Следовательно, в плоскости α выполняется теорема: любой вектор можно ______________________________ по двум данным неколлинеарным __________________, причем коэффициенты разложения определяются единственным __________________

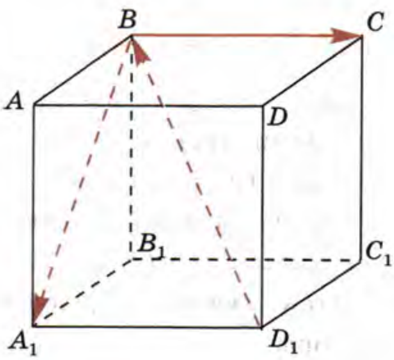
Поэтому $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y$ _____, т. е. $\vec{c}$ = ___ $\vec{a}$ + y ___, причем числа x и ___ определяются ____________________________________ образом, что и требовалось доказать.

127

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{D_1B}$ можно единственным образом разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите коэффициенты разложения.

Решение.

1) Прямые BC и A_1D_1 ________________________________, поэтому точки A_1, B, C и ___ лежат в __________ плоскости, а значит, векторы $\overrightarrow{BA_1}$, _____ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарны. Кроме того, векторы $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ не ____________________________



Следовательно, вектор $\overrightarrow{D_1B}$ ____________ разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и _____, причем коэффициенты разложения определяются ____________________________ образом.

2) В кубе ребра BC и A_1D_1 равны и ________________ , следовательно, четырехугольник A_1BCD_1 является ______________________ . Поэтому $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} +$ ____ (правило ______________________). Отсюда получаем: $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{BD_1} = (\_\_\_)\overrightarrow{BA_1} + (\_\_\_)\overrightarrow{BC}$, т. е. коэффициенты разложения равны -1 и ____

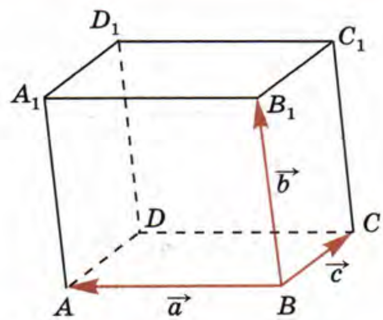
Ответ.

______________________________ разложения равны ____ и ____

128

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Докажите, что справедливо равенство:

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



Доказательство.

Используя законы ________________ векторов, преобразуем левую часть искомого равенства:

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} =$$

$$= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) + (\_\_\_\_ + \overrightarrow{AC_1}) + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) =$$

$$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \_\_\_\_ = \overrightarrow{BC_1} + \_\_\_\_ = \overrightarrow{BD_1}.$$

С другой стороны, диагональ BD_1 параллелепипеда изображает __________ векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и ____, т.е. по правилу __________ ________________ $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} +$ ___ + ___. Отсюда следует справедливость искомого равенства.

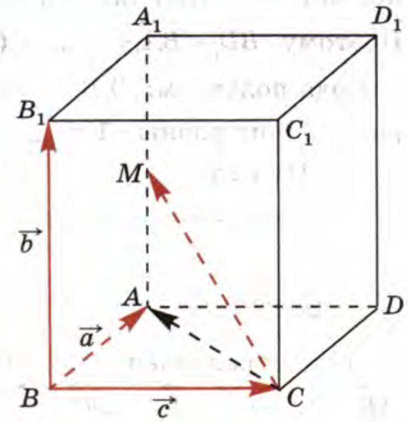
129

Заполните пропуски:

Любой вектор $\vec{p}$ __________ разложить по трем данным ________________________ векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\,\vec{a} + y$ ___ + ___ $\vec{c}$, где x, y, ___ — некоторые числа. При этом ________________ разложения определяются ________________ образом.

130

Точка M — середина ребра AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а) Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BB_1}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$.

б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{CM}$, если $AB=3$, $BC=4$, $BB_1=24$.

Решение.

а) По правилу ______________ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+$ _____. Так как $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$ $=$ _____, то $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-$ _____ $=\vec{a}-$ _____,

а так как точка M — середина ребра _____, то $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}$ ____ $=$ ____ $\overrightarrow{BB_1}=$ ____ $\vec{b}$.

Итак, $\overrightarrow{CM}=\vec{a}-$ ____ $+$ _____

б) В прямоугольном ______________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1\perp ABC$, следовательно, $AA_1\perp AC$. В прямоугольном треугольнике ACM $CM^2=AC^2+$ _____, но $AC^2=AB^2+$ _____ $=3^2+$ _____ $=$ _____, $AM=\frac{1}{2}$ _____ $=$ _____

Итак, $CM^2=$ _____ $+$ _____, т. е. $|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{\_\_\_\_\_}=$ _____

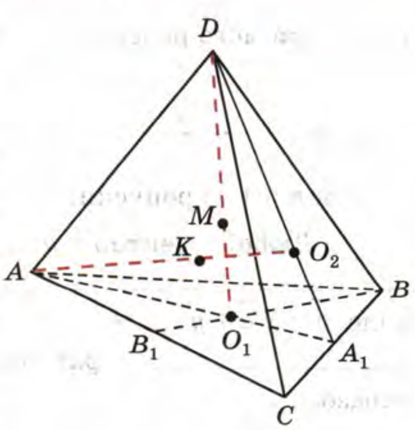
Ответ.

а) $\overrightarrow{CM}=$ ______________

б) $|\overrightarrow{CM}|=$ _____

131

Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.



Докажите, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины тетраэдра.

Доказательство.

Пусть точки A_1 и B_1 — середины отрезков BC и AC, O_1 и O_2 — точки пересечения медиан граней ABC и BCD. Обозначим буквой M точку на медиане DO_1 тетраэдра, такую, что $DM : MO_1 = 3 : 1$, буквой K — точку на медиане AO_2, такую, что $AK : KO_2 = 3 : 1$. Докажем, что точки M и K совпадают.

1) Так как $DM : MO_1 = 3 : 1$, то $\overrightarrow{DM} = \_\_\ \overrightarrow{MO_1}$, и, следовательно, для произвольной точки X пространства выполняется равенство (см. задание 121)

$$\overrightarrow{XM} = \frac{\overrightarrow{XD} + \_\_\ \overrightarrow{XO_1}}{1 + \_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{XD} + \frac{3}{4}\ \_\_\_\_ \ . \qquad (1)$$

2) Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ______ пересекаются в точке ____, поэтому $BO_1 : O_1B_1 =$ ____ $: 1$. Следовательно, $\overrightarrow{BO_1} = 2$ _____, и потому для точки X выполняется равенство

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{\overrightarrow{XB} + \_\_\_\_\_\_}{1 + \_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\ \_\_\_\_ \ . \qquad (2)$$

3) Точка B_1 — ____________ отрезка AC, поэтому $\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_\_)$ (см. задание 119).

4) Подставив выражение для $\overrightarrow{XB_1}$ в равенство (2), получим:

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\ \_\_\_\_ + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XC}).$$

5) Подставим теперь полученное разложение вектора $\overrightarrow{XO_1}$ по векторам $\overrightarrow{XA}$, ____ и $\overrightarrow{XC}$ в равенство (1):

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\ \_\_\_\_ + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XD}).$$

6) Аналогично рассуждая для точки K и произвольной точки X, получаем равенство

$$\overrightarrow{XK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XC} + \_\_\_\_).$$

Следовательно, точки M и ___ совпадают, т. е. медианы DO_1 и AO_2 тетраэдра ________________ в точке M и делятся ею в отношении _______, считая от вершин D и A соответственно.

7) Таким же образом это утверждение доказывается и для остальных двух __________ тетраэдра.

ОГЛАВЛЕНИЕ